Calcul matriciel

Exercice 1 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A + B$ puis $(A+B)^2$.
2. Calculer AB, A^2 et B^2.
3. Calculer $A^2 + 2A \times B + B^2$

Exercice 2 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; Y = \begin{pmatrix} 6 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits $X \times A$; $Y \times A$; $A \times B$; $A \times C$; $A \times M$ et $M \times A$.

Exercice 3 Soit le système $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 9z = 7 \\ 3x - 5y + 4z = 3 \end{cases}$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A telle que $A \times X = B$.
2. Calculer $A^3 - 6.A^2 - 36.A$
3. En déduire une matrice A' telle que $A \times A' = A' \times A = I$
4. En déduire la solution du système proposé.

Exercice 4 Soient a et b deux réels quelconques.

On pose $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

1. Exprimer le plus simplement possible $A \times B$.
2. Déterminer une condition sur a et b pour que $A \times B = I_2$
3. Calculer A^2. Quelle condition doit vérifier α pour que $A^2 = I_2$?
4. On suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
   Calculer A^2 puis A^3.
   En déduire A^n en fonction de l'entier naturel n.