

Echantillonnage

Exercice 1 Une machine fabrique des pièces en grande série. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce choisie au hasard, associe son diamètre en mm.

On admet que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(50; 0, 4)$.

Pour contrôler la fabrication, on prélève de façon aléatoire non exhaustive des échantillons de 10 pièces. On désigne par \bar{X} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 10 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon.

1. Déterminer la loi suivie par \bar{X} .
2. Déterminer le nombre positif h tel que $P(\bar{X} \in [50 - h; 50 + h]) = 0,95$

Exercice 2 Une machine fabrique des billes d'acier en grande série.

1. Soit X la variable aléatoire qui, à toute bille tirée au hasard dans la production d'une semaine donnée, associe son diamètre en millimètres.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $m = 3,32$ et d'écart-type $\sigma = 0,1$.

Pour être utilisable, une bille doit avoir un diamètre compris entre 3,10 cm et 3,50 cm.

Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'une bille prise au hasard dans la production de la semaine soit utilisable.

2. On prélève, au hasard, au cours de la même semaine, des échantillons de n billes.

On suppose que le tirage peut être considéré comme un tirage avec remise.

Soit \bar{X} la variable aléatoire qui, à un tel échantillon, associe la moyenne des diamètres des billes de cet échantillon.

- (a) Déterminer la loi de \bar{X} .
- (b) Quelle valeur minimale faut-il donner à n pour que \bar{X} prenne ses valeurs entre 3,29 et 3,35 avec une probabilité au moins égale à 0,99?

Exercice 3 Lors d'une élection, le candidat G.W.B. a obtenu 49,99 % des voix.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de taille 10 000, associe la proportion d'électeurs de cet échantillon ayant voté pour G.W.B.

1. Quelle est la loi suivie par $10\,000F$?
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de F ?
3. On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de taille 10 000.
Quelle est la probabilité que G.W.B ait la majorité des voix dans cet échantillon?

Exercice 4 Un magasin utilise 25 caisses enregistreuses. Le fournisseur de ces caisses affirme que 90 % des caisses de ce type n'ont aucune défaillance au cours des 900 premières heures de fonctionnement. On suppose que cette assertion est vraie.

On suppose également que la variable aléatoire F qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de 25 caisses de ce type, associe la proportion de caisses défectueuses de cet échantillon, suit une loi normale.

1. Quels sont les paramètres de la loi normale suivie par F ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un tel magasin, au plus 16 % de caisses ayant subi une défaillance au cours des 900 premières heures de fonctionnement.
3. Déterminer le nombre réel h tel que $P(F \geq h) = 0,95$