Equations différentielles du deuxième ordre

Exercice 1 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x + 2$.

1. Déterminer la solution générale de $(H) : y'' + 2y' + y = 0$.
2. Chercher une solution particulière de (E) de la forme $y = ax^2 + bx + c$.
3. Déterminer la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution dont la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par O et admet comme tangente en O la droite $(O; \vec{i})$.

Exercice 2 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

1. Déterminer la solution générale de $(H) : y'' - 2y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction u telle que $u(x) = x^2 e^x$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(2) = 0$.

Exercice 3 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + y' + y = 5\sin 2x + \cos 2x$.

1. Déterminer la solution générale de $(H) : y'' + y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $y = \lambda \sin 2x + \mu \cos 2x$.
3. Déterminer la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Exercice 4 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = e^{3x} + 6x + 1$

1. Résoudre l'équation : $y'' - y' - 6y = 0$.
2. (a) Déterminer une solution, notée y_1, de l'équation $y'' - y' - 6y = e^{3x}$
   (b) Déterminer une solution, notée y_2, de l'équation $y'' - y' - 6y = 6x + 1$
   (c) Montrer que $y_1 + y_2$ est solution de (E) .
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 5 Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' + (2m + 1)\, y' + 2my = e^{-2x}$$

où m est un réel quelconque.

1. Résoudre (E) lorsque $m = 0$.
2. m étant quelconque, donner les différentes formes de la solution générale de (E) suivant les valeurs de m
   On pourra remarquer que le discriminant de l'équation caractéristique est de la forme $(am + b)^2$
3. Préciser la solution générale lorsque $m = 1$ puis lorsque $m = \dfrac{1}{2}$