

# Echantillonnage - Estimation

**Exercice 1** Une machine automatique fabrique des pièces.

- On choisit au hasard un lot de 10 000 pièces et on mesure les longueurs en mm de ces pièces. On obtient le tableau suivant :

longueurs en mm	[244 ;246[	[246 ;248[	[248 ;250[	[250 ;252[	[252 ;254[	[254 ;256[
effectifs	113	1318	3510	3530	1390	139

Calculer au 1/100 mm, la moyenne et l'écart-type de ce lot.

*Les calculs intermédiaires ne sont pas demandés.*

- On considèrera dans la suite que la distribution du lot est normale, de moyenne  $m = 250$ , d'écart-type  $\sigma = 1,94$ . On examine un échantillon de 36 pièces de ce lot. Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon soit extérieure à l'intervalle  $[249,1 ; 250,9]$  ?
- On fabrique maintenant un nouveau lot de pièces. On règle la machine pour que la distribution du lot soit normale de moyenne 400, l'écart-type restant 1,94.  
La longueur d'une pièce est acceptable si elle est comprise entre 397 mm et 403 mm.  
Quel est le pourcentage de pièces dont la longueur est acceptable ?

**Exercice 2** Une machine automatique fabrique des entretoises destinées à un montage de roulements. La longueur de ces entretoises doit être comprise, au sens large, entre 37,45 et 37,55 mm. La variable aléatoire  $X$  qui, à chaque entretoise choisie au hasard, associe sa longueur, est une variable gaussienne de moyenne  $m = 37,50$ .

- Quel doit être l'écart-type de la variable aléatoire  $X$  pour que 99 sur 100 des entretoises fabriquées soient bonnes ?
- On prélève un échantillon, non exhaustif, dans la production. Quel doit être l'effectif de cet échantillon pour que la moyenne des longueurs des pièces prélevées appartienne à l'intervalle  $[37,495 ; 37,505]$  avec une probabilité de 0,95 ?

**Exercice 3** Une usine produit des extrudés dont l'humidité est contrôlée toutes les deux heures sur un échantillon aléatoire. Chaque résultat confronté à une norme souhaitée entraîne éventuellement de nouveaux réglages des machines. Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque extrudé son humidité. On a mesuré l'humidité d'un grand nombre d'extrudés d'un même lot, et obtenu les résultats suivants répartis en classes :

Humidité en %	effectifs observés $n_i$
moins de 11,1	2
de 11,1 à moins de 11,2	4
de 11,2 à moins de 11,3	6
de 11,3 à moins de 11,4	10
de 11,4 à moins de 11,5	15
de 11,5 à moins de 11,6	14
de 11,6 à moins de 11,7	13
de 11,7 à moins de 11,8	6
plus de 11,8	5

- Calculer la moyenne  $m_0$  et l'écart-type  $\sigma_0$  de cet échantillon à  $10^{-3}$  près.

2. On suppose que la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de moyenne 11 et d'écart-type 0,2. Les contrôles de qualité se font sur des échantillons de 10 extrudés. On désigne par  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui associe à chaque échantillon de 10 extrudés la moyenne des mesures d'humidité. Quelle est la loi suivie par  $\bar{X}$ ? Déterminer un intervalle centré en 11 tel que la probabilité que  $\bar{X}$  appartienne à cet intervalle soit 0,95.

**Exercice 4** On considère que les membres licenciés de la Fédération Française de Volley-Ball ont une taille dont la distribution est normale d'écart-type  $\sigma = 10$  cm. Avec cette hypothèse, on se propose d'estimer la moyenne  $m$  de la taille des membres de la fédération à partir d'un échantillon constitué d'un club dont l'effectif est  $n = 49$  joueurs. La moyenne des tailles des joueurs de ce club est  $\bar{x} = 1m78$ . On assimile cet échantillon à un échantillon aléatoire non exhaustif des membres de la fédération. Donner, en détaillant le raisonnement utilisé, une estimation de  $m$  par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance 95%.

**Exercice 5** Dans cet exercice, on donnera, pour chaque résultat demandé, l'approximation décimale arrondie à  $10^{-2}$  près.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des composants électroniques d'un certain type  $T$ . L'objectif de cet exercice est d'étudier la durée de vie de ces composants en utilisation normale. Pour cela, on prélève au hasard dans la production, un échantillon de 125 composants et on le met sous tension sur un banc d'essai étalonné provoquant leur vieillissement accéléré. Les résultats, traduits en heures d'utilisation normale, sont consignés dans le tableau suivant :

Durée de vie (en milliers d'heures)	Effectifs	Durée de vie (en milliers d'heures)	Effectifs
[50 ;60[	4	[100 ;110[	26
[60 ;70[	8	[110 ;120[	18
[70 ;80[	13	[120 ;130[	11
[80 ;90[	16	[130 ;140[	7
[90 ;100[	20	[140 ;150[	2

- Construire l'histogramme de cette série statistique
  - Calculer la moyenne et de l'écart-type de cette série.
- On suppose que la variable aléatoire  $X$  qui, à tout composant choisi au hasard, associe sa durée de vie en milliers d'heures, suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

  - Donner une estimation ponctuelle de  $\mu$  et  $\sigma$ .
  - On considère que la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de moyenne 99 et d'écart-type 20,9. Calculer les probabilités des événements suivants :
    - $80 \leq X \leq 110$
    - $X \geq 120$
- On suppose toujours que  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . Soit  $Z$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de taille  $n$  prélevé au hasard dans la population totale, associe la moyenne des durées de vie des composants de l'échantillon.

  - Déterminer la loi suivie par  $Z$ .
  - En utilisant l'échantillon précédent ( $n = 125$ ) donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne de la population :
    - avec un coefficient de confiance de 90%
    - avec un coefficient de confiance de 99%
  - Peut-on en déduire que la moyenne  $\mu$  est obligatoirement comprise entre 94 et 104 ?
  - Déterminer quelle devrait être la taille minimale de l'échantillon à étudier pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance de la moyenne soit inférieure ou égale à 4, au seuil de 1%.