BTS 2003 : Eléments de correction

Exercice 1

1. (a) $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$ car A et B sont indépendants.
   D'où $P(E_1) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008$.

   (b) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 = 0,0592$

2. (a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 = 0,9856$

   (b) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
   $= 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126 + 0,0016 = 0,9998$

   (c) On a vu que $P(X \leq 2) = 0,9856$.
   De plus : $P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0,9856 + 0,0126 = 0,9982$. Donc $n = 3$

3. $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,01) \Leftrightarrow T = \dfrac{Y - 1,5}{0,01} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.
   La probabilité demandée est
   $p = P(1,47 \leq Y \leq 1,53) = P(-3 \leq T \leq 3) = 2\Pi(3) - 1 = 2 \times 0,99865 - 1 = 0,997$ à 10^{-3}

4. (a) $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ avec $\sigma = 0,01$ et $n = 100$
   De plus, sous H_0, $\mu = 1,5$. Donc $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,001)$

   (b) $\bar{Z} \hookrightarrow \mathcal{N}(1,5; 0,001) \Leftrightarrow \bar{T} = \dfrac{\bar{Z} - 1,5}{0,001} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$

   $$P\left(1,5 - h \leq \bar{Z} \leq 1,5 + h\right) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,001} \leq \bar{T} \leq \frac{h}{0,001}\right) = 0,95$$

   $$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,001}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,001}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{h}{0,001} = 1,96 \Leftrightarrow h = 0002 \text{ à } 10^{-3}$$

   (c) On prélève un échantillon de 100 bouteilles et on calcule la moyenne $\bar{z}$ des volumes d'eau contenus dans les bouteilles de cet échantillon.
   Si $\bar{z} \in [1,5 - h; 1,5 + h] = [1,498; 1,502]$ on accepte H_0. Sinon on refuse H_0, c'est à dire qu'on accepte H_1.

   (d) $\bar{z} = 1,495$, donc on refuse H_0

Exercice 2

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

1. $x \mapsto -x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -1$. Donc la solution générale, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = -y$ est
$$y = Ce^{-x}$$
où C désigne une constante réelle quelconque.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) = 2e^{-x} + 2x\left(-e^{-x}\right) = (2-2x)\,e^{-x}$ d'où :
$\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) + h(x) = (2-2x)\,e^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$
h est donc solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation (E).
3. La solution générale de l'équation $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ peut s'obtenir en ajoutant, à une solution particulière de cette équation, la solution générale de l'équation homogène associée : $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$.
La solution générale de (E) est donc
$$y = 2xe^{-x} + Ce^{-x} = (2x + C)\,e^{-x}$$
où C désigne une constante réelle quelconque.
4. f étant solution de (E) on a $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (2x + C)\,e^{-x}$
La condition initiale $f(0) = 3$ donne $C = 3$ d'où $f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$

Partie B. Etude d'une fonction

1. (a) $f(0) = 3$
   (b) $f'(0) = -1$
   (c) On a $f'(x) = (a - ax - b)\,e^{-x}$ d'où $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} b = 3 \\ a - b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 3 \\ a = 2 \end{array}\right.$
   D'où $f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$
2. (a) L'application de $(uv)' = u'v + uv'$ donne, avec $u = 2x+3$ et $v = e^{-x}$:
   Pour tout x réel : $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+3)\left(-e^{-x}\right) = (-2x-1)\,e^{-x}$
   (b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ a même signe que $(-2x-1)$
   Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$
   (c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	

   (d) On a $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$. On en déduit :
   $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
   (e) La partie régulière du développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$ s'obtient en multipliant $(2x+3)$ par $\left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2. On obtient alors :
$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\,avec \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Partie C. Calcul intégral

1. Pour tout x réel : $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$. Par intégration, on obtient : $F(x) = -f(x) - 2e^{-x}$
D'où $F(x) = -(2x+3)\,e^{-x} - 2e^{-x} = (-2x-5)\,e^{-x}$
2. (a) $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\ dx = [F(x)]_0^{1/2} = F(1/2) - F(0) = -6e^{-1/2} - (-5) = 5 - 6e^{-1/2}$
   (b) $I = 1,361$ à 10^{-3}.
3. (a) $J = \left[3x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{48} = \dfrac{65}{48}$
   (b) $J = 1,354$ à 10^{-3}
   (c) $1,361 - 1,354 = 0,007 < 0,01 = 10^{-2}$