

BTS 2004 : Eléments de correction

Exercice 1 A. *Loi normale* Rappel : Tous les résultats sont donnés à 10^{-2}

1. $T = \frac{X - 100}{0,25} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

$$P(99,45 \leq X \leq 100,55) = P\left(\frac{-0,55}{0,25} \leq T \leq \frac{0,55}{0,25}\right) = 2\Pi\left(\frac{0,55}{0,25}\right) - 1 = 2\Pi(2,2) - 1 = 0,97$$

2. $P\left(\frac{-h}{0,25} \leq T \leq \frac{h}{0,25}\right) = 0,95 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) = 0,975$

D'où $\frac{h}{0,25} = 1,96$ et donc $h = 0,49$

0,95 est la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ait une longueur appartenant à l'intervalle $[99,51; 100,49]$.

B. *Loi binomiale et loi de Poisson*

1. A chaque tige tirée au hasard, il y a deux issues possibles :

* la tige est conforme pour la longueur

* la tige n'est pas conforme pour la longueur

Les tirages sont indépendants car le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Donc la probabilité d'obtenir une tige non conforme pour la longueur est la même à chaque tirage.

C'est $p = 0,03$

On effectue $n = 50$ tirages

Donc Y suit la binomiale $\mathcal{B}(50; 0,03)$. On note $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(50; 0,03)$.

2. $P(Y = 2) = 0,26$

3. $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0,81$

4. $\mathcal{B}(50; 0,03) \simeq \mathcal{P}(1,5)$

5. $P(Z = 2) = 0,25$ (tables)

$$P(Z \leq 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = 0,81$$

C. *Intervalle de confiance*

1. Une estimation ponctuelle $\hat{\mu}$ de la moyenne μ est donnée par la moyenne de l'échantillon.

Donc $\hat{\mu} = 9,99$

2. $\left[\bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ avec $\bar{x} = 9,99$; $\sigma = 0,19$; $n = 50$ et α tel que $2\Pi(\alpha) - 1 = 0,95$ donne $\alpha = 1,96$ et l'intervalle cherché est donc $[9,93; 10,05]$.

3. C'est faux!!!

Exercice 2 A. *Résolution d'une équation différentielle*

1. $y = Ce^{-0,2x^2}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. $h'(x) + 0,4x h(x) = 0 + 0,4x = 0,4x$ donc h est solution de (E).

3. $y = 1 + Ce^{-0,2x^2}$ où C est une constante réelle quelconque.

4. $F(x) = 1 + Ce^{-0,2x^2}$ et $F(0) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$ d'où

$$F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$$

B. *Etude d'une fonction*

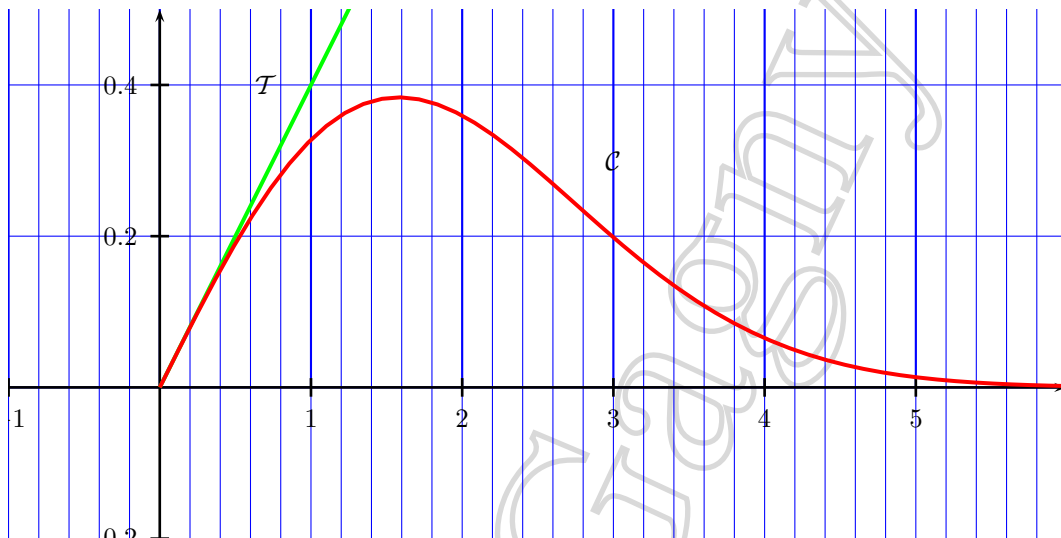
1. L'axe des abscisses est asymptote à \mathcal{C} vers $+\infty$.

2. (a) $f'(x) = 0,4e^{-0,2x^2} + 0,4x(-0,4xe^{-0,2x^2}) = 0,4(1 - 0,4x^2)e^{-0,2x^2}$ d'où le résultat.

(b) Sur $[0; +\infty[$ $f'(x)$ a même signe que $1 + \sqrt{0,4} x$

(c)	x	0	$\frac{1}{\sqrt{0,4}}$	$+\infty$	avec $M = 0,38$ à 10^{-2}
	$f'(x)$	+	0	-	
	$f(x)$	0	\nearrow	M	\searrow 0

3. La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 permet de déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T} : y = 0,4 x$
 La position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{T} est donnée par le signe de $f(x) - 0,4 x$
 $f(x) - 0,4 x = -0,08 x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
 $-0,08 x^3 + x^3 \varepsilon(x)$ a même signe, au voisinage de 0, que $-0,08 x^3$.
 On en déduit que, au voisinage de 0, \mathcal{C} est en dessous de \mathcal{T} (ne pas oublier que $x \geq 0$)



C. Application à un problème de probabilité

1. $P(X \leq 4) = \int_0^4 f(t) dt = 1 - e^{-0,2 \cdot 4^2} = 1 - e^{-3,2} = 0,96$ à 10^{-2} près.

2. (a) $P(X \leq x_0) = 0,99 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t) dt = 0,99 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2x_0^2} = 0,99 \Leftrightarrow e^{-0,2x_0^2} = 0,01$

(b) De (a) on déduit : $-0,2 x_0^2 = \ln 0,01$ d'où $x_0^2 = \frac{\ln 0,01}{-0,2}$ et $x_0 = \sqrt{\frac{\ln 0,01}{-0,2}}$ car $x_0 \geq 0$

On obtient : $x_0 = 4,80$ à 10^{-2} près.

(c) L'affirmation peut s'écrire : " $P(X \leq 5) \geq 0,99$?"

Soit $F(x) = P(X \leq x)$. F est la fonction de répartition de X et donc, comme toute fonction de répartition, elle est croissante.

On a donc $F(4,80) \leq F(5)$, c'est à dire : $P(X \leq 4,80) \leq P(X \leq 5)$.

Or, d'après (b) : $P(X \leq 4,80) = 0,99$. Donc $P(X \leq 5) \geq 0,99$.

La réponse est donc OUI (les justifications ci dessus n'étaient pas demandées)