BTS 2005 : Eléments de correction

Exercice 1 *A. Equation différentielle.*

1. Sur $]-1;+\infty[$, l'équation peut s'écrire $y' = -\frac{1}{1+x}y$.
   La fonction A définie sur $]-1;+\infty[$ par $A(x) = \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction a définie sur $]-1;+\infty[$ par $a(x) = \frac{1}{1+x}$
   On en déduit (voir formulaire) la solution générale de (E) : $y = ke^{-\ln(1+x)} = ke^{\ln\frac{1}{1+x}} = \frac{k}{1+x}$ où k désigne une constante réelle quelconque.
2. g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in]-1;+\infty[: g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$
   De plus, $\forall x \in]-1;+\infty[: (1+x)g'(x) + g(x) = (1+x)\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}$
   Donc g est solution de (E)
3. **Théorème :** *La solution générale de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ peut s'obtenir en ajoutant, à une solution particulière de cette équation, la solution générale de l'équation homogène associée : $y' = a(x)y$.*
   On en déduit que la solution générale de (E) peut s'écrire : $y = \frac{k+\ln(1+x)}{1+x}$
4. f étant solution de (E) : $f(x) = \frac{k+\ln(1+x)}{1+x}$
   $f(0) = 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

B. Etude de fonction

1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$.
2. (a) $\forall x \in]-1;+\infty[: f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-[2+\ln(1+x)]}{(1+x)^2} = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

   (b) $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1+x \leq \frac{1}{e}$ car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   Finalement : $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1+\frac{1}{e}$
   Un carré étant toujours positif, on en déduit le signe de $f'(x)$:

x	-1		$-1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   (c)

x	-1		$-1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3. (a) La troncature à l'ordre un de la partie régulière du développement limité de f au voisinage de 0 permet d'énoncer qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 0 peut s'écrire : $y = 2-x$

   (b) $f(x) - (2-x) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe, au voisinage de 0, que $\frac{1}{2}x^2$
   Donc, au voisinage de 0, $f(x) - (2-x) \geq 0$ c'est à dire que la courbe est au dessus de la tangente.

C. Intégration

Eiffel - Gagny
Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

1. $\forall x \in]-1; +\infty[: G'(x) = \frac{1}{2} 2 \ln(1+x) \frac{1}{1+x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$
2. $f(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + G'(x) \Rightarrow F(x) = 2\ln(1+x) + G(x)$
   D'où $F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$
3. (a) $I = \int_0^2 f(x)\, dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 2\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$
   (b) A 10^{-2} près : $I = 2,80$
   (c) $f \geq 0$ sur $[0; 2]$ donc I représente l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$

Exercice 2 *A. Loi normale*

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(90; 0,17) \Leftrightarrow X_1^* = \frac{X_1 - 90}{0,17} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$
   $P(89,6 \leq X_1 \leq 90,4) = P\left(\frac{-0,4}{0,17} \leq X_1^* \leq \frac{0,4}{0,17}\right) = 2\Pi\left(\frac{0,4}{0,17}\right) - 1 = 2\,\Pi(2,35) - 1 = 2 \times 0,9906 - 1 = 0,9812 = 0,98$ à 10^{-2} près
2. $D \hookrightarrow \mathcal{N}(90; \sigma_1) \Leftrightarrow D^* = \frac{D - 90}{\sigma_1} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$
   $P(89,6 \leq D \leq 90,4) = 0,99 \Leftrightarrow P\left(-\frac{0,4}{\sigma_1} \leq D^* \leq \frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,99 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) - 1 = 0,99$
   D'où $\Pi\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,995$ puis $\frac{0,4}{\sigma_1} = 2,575$ et enfin $\sigma_1 = \frac{0,4}{2,575} = 0,16$ à 10^{-2} près.

B. Loi binomiale

1. Pour chaque rondelle prélevée dans le stock, il y a deux issues possibles : Son diamètre est défectueux ou pas.
   Le prélèvement étant assimilé à un tirage avec remise, il y a indépendance : La probabilité d'obtenir une rondelle avec un diamètre défectueux est la même à chaque tirage. C'est $p = 0,02$.
   On effectue $n = 4$ tirages.
   Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(4; 0,02)$
2. Si $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p) : P(Y_1 = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
   D'où $P(Y_1 = 0) = C_4^0 0,02^0 (1 - 0,02)^{4-0} = 0,98^4 = 0,922$ à 10^{-3} près.
3. $P(Y_1 \leq 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1) = 0,98^4 + 4 \times 0,02 \times 0,98^3 = 0,998$ à 10^{-3} près.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

1. Lorsqu'on approche la loi de Y_2 par la loi de Z, on doit conserver les caractéristiques de Y_2, à savoir : Espérance et écart-type.
   $E(Y_2) = 1000 \times 0,02 = 20$ et $\sigma(Y_2) = \sqrt{1000 \times 0,02 \times 0,98} = 4,43$
   Il faut donc que $E(Z) = 20$ et $\sigma(Z) = 4,43$. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,43)$
2. $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 4,3) \Leftrightarrow Z^* = \frac{Z - 20}{4,43} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$
   $P(Z \leq 15,5) = P\left(Z^* \leq \frac{-4,5}{4,43}\right) = \Pi\left(-\frac{4,5}{4,43}\right) = \Pi(-1,02) = 1 - \Pi(1,02) = 1 - 0,8461 = 0,1539 = 0,15$ à 10^{-2} près.

C. Test d'hypothèse

1. On prélève un échantillon de 100 rondelles et on calcule la moyenne $\bar{x}$ des diamètres de ces 100 rondelles.
   Si $\bar{x} \in [89,967; 90,033]$ on accepte l'hypothèse $H_0 : \mu = 90$
   Sinon, on accepte $H_1 : \mu \neq 90$.
2. $\bar{x}$ appartient à l'intervalle d'acceptation de H_0, donc, au seuil de risque de 5%, on peut conclure que la livraison est conforme pour le diamètre.

Eiffel - Gagny
Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff