

# BTS Batiment 1999

**Exercice 1** Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces :  $P_1$  et  $P_2$ .

- Une pièce  $P_1$  est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.  
On note  $L$  la variable aléatoire qui, à chaque pièce  $P_1$  choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.  
On suppose que  $L$  suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.  
Déterminer, à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'une pièce  $P_1$  soit bonne.
- On note  $A$  l'événement : "une pièce  $P_1$  choisie au hasard dans la production des pièces  $P_1$  est défectueuse".  
On note de même  $B$  l'événement : "une pièce  $P_2$  choisie au hasard dans la production des pièces  $P_2$  est défectueuse".  
On admet que les probabilités des deux événements  $A$  et  $B$  sont  $p(A) = 0,03$  et  $p(B) = 0,07$  et on suppose que ces deux événements sont indépendants.  
Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à  $10^{-4}$  près, la probabilité de chacun des événements suivants :
  - $E_1$  : les deux pièces du module sont défectueuses ;
  - $E_2$  : au moins une des deux pièces du module est défectueuse ;
  - $E_3$  : aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ;
- Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.  
On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement  $E_3$  défini au 2.  
On suppose que la probabilité de l'événement  $E_3$  est 0,902.
  - Expliquer pourquoi  $X$  suit une loi binômiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
  - Calculer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement  $E_3$ .
- Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces  $P_2$ .  
Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces  $P_2$  prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que  $\bar{X}$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart type  $\frac{\sigma}{\sqrt{60}}$  avec  $\sigma = 0,084$ . On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces  $P_2$  d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.  
On constate que la valeur approchée arrondie à  $10^{-3}$  près de la moyenne  $\bar{x}$  de cet échantillon est  $\bar{x} = 4,012$ .
  - À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à  $10^{-3}$  près, de la moyenne  $\mu$  des diamètres des pièces  $P_2$  produites pendant cette journée.
  - Déterminer un intervalle de confiance centré en  $\bar{x}$  de la moyenne  $\mu$  des diamètres des pièces  $P_2$  produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.
  - On considère l'affirmation suivante : "la moyenne  $\mu$  est obligatoirement entre 3,991 et 4,033". Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

**Exercice 2** Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante

**partie A – Résolution d’une équation différentielle**

On considère l’équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1 \quad (E)$$

où  $y$  désigne une fonction de la variable  $x$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $y'$  la fonction dérivée de  $y$ , et  $y''$  sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l’équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (E')$$

2. Déterminer les constantes réelles  $a, b, c$  pour que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l’équation (E)

3. Dédire du 1. et du 2. l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E).  
4. Déterminer la solution  $f$  de l’équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

**partie B – Étude d’une fonction**

Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions de la variable  $x$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  et  $\mathcal{P}$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$ .  
Interpréter graphiquement le dernier résultat.
- Étudier sur  $\mathbb{R}$  la position relative des deux courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$ .
  - Démontrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$ .
  - Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie); les valeurs approchées seront arrondies à  $10^{-2}$  près.
  - Construire la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe  $\mathcal{P}$ .
  - Démontrer, à l’aide d’une intégration par parties, que la valeur exacte en  $\text{cm}^2$  de l’aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , la parabole  $\mathcal{P}$  et les droites d’équations  $x = -3$  et  $x = -2$  est  $A = 4(-4e^{-3} + 3e^{-2})$ .  
Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $A$ .

## Annexe (à rendre avec la copie)

## partie B

4 (a)

|        |    |      |    |      |    |      |   |     |   |
|--------|----|------|----|------|----|------|---|-----|---|
| $x$    | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 |
| $f(x)$ |    |      |    |      |    |      |   |     |   |

(b)

