BTS blanc février 2003

Exercice 1 (*8 points*) Les parties A et B sont indépendantes

Dans cet exercice l'unité de longueur est le millimètre.

Une machine fabrique en grande série un certain type de pièces rectangulaires en tôle.

A. On note L la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa largeur.
On admet que L suit la loi normale de moyenne 58,11 et d'écart type 0,15.
Déterminer la probabilité p_1 qu'une pièce prélevée au hasard dans cette production ait une largeur comprise entre 57,90 et 58,30. Arrondir à 10^{-4}.

B. On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est 0,06.
On prélève au hasard 50 pièces.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de 50 pièces avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces ainsi prélevées, associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

2. Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité de chacun des événements suivants :
   E_1 : "l'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse".
   E_2 : "l'échantillon comporte une seule pièce défectueuse".
   E_3 : "l'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses".

3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de même espérance mathématique.
   (a) Déterminer le paramètre de cette loi.
   (b) En utilisant cette loi, déterminer la nouvelle probabilité de chacun des trois événements définis à la question 2°. Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 2 (*12 points*)

A : Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $(x+1)\,y' + xy = e^{-x}$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $I =]-1;+\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$
   Vérifier que pour tout x de I : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$
2. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle I, que l'on notera G.
3. Résoudre, sur l'intervalle I, l'équation différentielle (E') : $(x+1)\,y' + xy = 0$.
4. Démontrer que la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = -e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
5. Déduire des questions précédentes toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Parmi ces solutions, déterminer la fonction f qui vérifie : $f(0) = -2$

B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = (-x-2)\,e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. (a) Démontrer que, pour tout x de $]-1;+\infty[$: $f'(x) = (x+1)\,e^{-x}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
3. (a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 est :
   $$f(x) = -2 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
   (b) En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de ce point.
4. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

C : Calcul intégral

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que
   $$\int_0^2 (-x-2)\,e^{-x}\,dx = 5e^{-2} - 3$$
2. Donner une interprétation garphique du nombre $I = 5e^{-2} - 3$