# Notions d'analyse combinatoire

## 1 Notions d'analyse combinatoire

### 1.1 Principe multiplicatif

Rappel : L'ensemble noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.
Si $F = E$, $E \times F$ se note aussi $E^2$.
$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est l'ensemble des $p$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_p \in E_p$
Si un ensemble $E$ possède $n$ éléments, on note $card(E) = n$ ou $|E| = n$

**Proposition 1** $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$

**Démonstration.** Supposons que $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et $F = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. $E \times F$ est l'ensemble des couples $(a_i, b_j)$. Rangeons les couples dans un tableau rectangulaire de $m$ lignes et $n$ colonnes de sorte que le couple $(a_i, b_j)$ soit situé à l'intersection de la $i^e$ ligne et de la $j^e$ colonne.
Alors, chaque couple apparaît une et une seule fois.
Comme il y a $mn$ cases, on en déduit le résultat.

**Exemple 1** La combinaison d'un cadenas est constituée d'une lettre suivie d'un chiffre. Il y a $26 \times 10 = 260$ combinaisons possibles.

**Proposition 2** $card(E \times F \times G) = card(E) \times card(F) \times \cdots \times card(G)$

**Démonstration.** Supposons que $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$, $F = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\}$ et $G = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n_3}\}$. Chaque triplet $(a_i, b_j, c_k)$ peut être considéré comme un couple $((a_i, b_j), c_k)$. Comme il y a $n_1 n_2$ couples $(a_i, b_j)$ et $n_3$ éléments $c_k$, le résultat sur les couples permet de conclure.
Plus généralement, on montre :

**Proposition 3** $card(E_1 \times E_2 \times \cdots E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \cdots \times card(E_p)$

Beaucoup d'applications pratiques sont basées sur la reformulation de cette proposition. C'est le principe multiplicatif.

- $p$ décisions successives avec exactement $n_k$ choix possibles à la $k^{ème}$ étape produisent au total $n_1.n_2 \ldots .n_p$ résultats distincts.

Principe que l'on peut également énoncer :

- Une épreuve aléatoire $\mathcal{E}$ constituée de la succession de $p$ épreuves éléatoires $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$ ayant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ issues possibles comporte $n_1.n_2 \ldots .n_p$ issues.

**Remarque 1** Un $p$-uplet de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est une suite ordonnée de $p$ éléments.

**Exemple 2** Le code d'accès d'un coffre est constitué de 3 lettres suivies de 5 chiffres. Il y a $26^3.10^5$ codes possibles.

**Exemple 3** Supposons que la population soit classée selon le sexe M ou F (M pour masculin et F pour féminin), la situation de famille m ou c ( m pour marié et c pour célibataire ), et enfin la catégorie professionnelle (17 catégories possibles). Il y aura en tout $2 \times 2 \times 17 = 68$ classes différentes.

**Exemple 4** Le nombre de tenues différentes que l'on peut porter lorsqu'on possède 3 chapeaux, 5 pantalons et 7 chemises est $3 \times 5 \times 7 = 105$.

## 1.2 Arrangements avec répétition

**Proposition 4** $card(E^p) = (cardE)^p$

**Démonstration.** C'est un cas particulier de la proposition 3.
Avec $n$ éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il est possible de former $n^p$ $p$-uplets distincts $(a_i, a_j, \ldots, a_r)$. Un tel $p$-uplet est donc une suite ordonnée de $p$ .éléments pris parmi $n$. On dit aussi que c'est un arrangement avec répétition de $p$ .éléments pris parmi $n$.
On a donc le théorème suivant:

**Théorème 1** Le nombre d'arrangements avec répétition de $p$ éléments pris parmi $n$ est $n^p$.

**Exemple 5** Au loto sportif, le nombre de grilles possibles lorsque les paris portent sur 15 matchs est $3^{15}$.(Il y a pour chaque match 3 choix possibles : G=gagné, N=nul ou P=perdu). Une grille est une suite ordonnée de 15 éléments pris parmi G, N ou P.

**Exemple 6** Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, il est possible de former $6^4 = 1296$ nombres de quatre chiffres.

**Exercice 1** Combien peut-on former de codes de 5 lettres avec l'alphabet. Réponse : $26^5$.

**Exercice 2** Un digicode comporte les lettres A, B et C et les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Combien peut-on former de codes à trois symboles ? Réponse : $3^9$.

## 1.3 Arrangements sans répétition

**Définition 1** On appelle arrangement sans répétition de $p$ éléments pris parmi $n$ toute suite ordonnée de $p$ .éléments distincts.

**Exemple 7** Le mot "livre" est un arrangement sans répétition de 5 lettres prises parmi les 26 lettres de l'alphabet. Ce n'est pas le cas du mot "baobab".

**Théorème 2** Le nombre d'arrangements sans répétition de $p$ éléments pris parmi $n$ est, si $p \leq n$,

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(-2)\ldots(n-p+1)}$$

**Démonstration.** Il y a $n$ choix possibles pour le $1^{er}$ élément ; $n-1$ pour le $2^{ème}$ ; $n-2$ pour le $3^{ème}$ ; $\ldots$ ; $n-p+1$ pour le $p^{ème}$. D'où le résultat d'après le principe multiplicatif.

**Remarque 2** Si $p < n$ , on peut écrire : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Or $A_n^n = n!$ d'après le théorème ci-dessus.
On pose donc par convention $0! = 1$ et on écrit :

$$Si \;\; p \leq n, \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \;\; avec \;\; 0! = 1$$

**Exercice 3** Nombre possible de tiercés dans l'ordre avec 21 chevaux.

**Exercice 4** Combien de nombres distincts de trois chiffres peut-on former en n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3, 5 et 9, chacun d'eux pouvant être utilisé plusieurs fois dans la composition d'un nombre. Même question lorsqu'on impose à chaque nombre de n'être composé qu'à partir de chiffres différents. Réponses : $5^3$ et $A_5^3$.

**Exercice 5** Un magazine TV propose, pour un jeu sondage, une liste de 15 émissions. On demande au lecteur de classer, en les numérotant de 1 à 5, les cinq émissions qu'il a préférées. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Réponse : $A_{15}^5$

**Définition 2** On appelle permutation d'un ensemble à $n$ éléments toute suite ordonnée comprenant ces $n$ éléments

**Théorème 3** Le nombre de permutations d'un ensemble comportant $n$ éléments est

$$n! = 1.2.3\ldots..(n-1).n$$

**Démonstration.** Si, dans le théorème précédent, on prend $p = n$, un arrangement sans répétition de $n$ éléments est une permutation de ces $n$ éléments. Il y a donc $A_n^n = n!$ permutations possibles.

**Exemple 8** Avec les lettres a, b et c, on peut former les permutations suivantes : abc ; acb ; bac ; bca ; cab ; cba.

**Exercice 6** Un magazine TV propose, pour un jeu sondage, une liste de 10 émissions. On demande au lecteur de classer par ordre de préférence, en les numérotant de 1 à 10, ces dix émissions. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Réponse : 10!

## 1.4 Combinaisons

**Définition 3** On appelle combinaison de $p$ .éléments d'un ensemble E comportant $n$ éléments ($n \geq p$), toute partie de $E$ à $p$ .éléments.

**Remarque 3** Dans une combinaison, l'ordre n'intervient pas

**Exemple 9** 13 cartes choisies parmi 52 constituent une main au bridge. L'ordre de ces cartes n'intervenant pas, cette main est une combinaison de 13 cartes.

**Exemple 10** Une course hippique comporte 21 chevaux au départ. On peut miser sur trois chevaux de 2 manières différentes: Premièrement en donnant les 3 premiers globalement et deuxièmement en donnant le $1^{er}$, le $2^{ème}$ et le $3^{ème}$. La première méthode consiste à trouver une combinaison de 3 chevaux pris parmi 21 alors que la deuxième consiste à trouver un arrangement de 3 chevaux pris parmi 21.

**Théorème 4** Le nombre de combinaisons d'ordre $p$ .d'un ensemble à $n$ éléments est :

$$\boxed{si \;\; p \leq n, \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

**Démonstration.** Pour former un arrangement de $p$ .éléments pris parmi $n$, on peut procéder en deux étapes :
1. Choisir $p$ .éléments parmi $n$.
2. Ordonner ces $p$ .éléments.
Or, il y a $C_n^p$ façons de choisir $p$ .éléments parmi $n$ et il y a $p!$ façons de les ordonner. En utilisant le principe multiplicatif, on en déduit: $A_n^p = C_n^p.p!$.
NOTATION : $C_n^p$ se note aussi $\binom{n}{p}$

**Remarque 4** Le théorème précédent peut être reformulé de la façon suivante :

$$\boxed{\text{Dans un ensemble comportant } n \text{ éléments il y a } C_n^p \text{ façons d'en choisir } p}$$

**Exercice 7** De combien de manières est -il possible d'obtenir deux cartes à "Trèfle" lorsqu'on prend deux cartes parmi un jeu de 32. Réponse : $C_8^2$ (il y a en tout 8 cartes à trèfle).

**Exercice 8** De combien de manières est -il possible d'obtenir deux cartes "As" lorsqu'on prend deux cartes parmi un jeu de 32. Réponse : $C_4^2$ (il y a en tout 4 as).

**Exercice 9** De combien de manières est -il possible d'obtenir deux cartes "As" et trois cartes "Roi" lorsqu'on prend cinq cartes parmi un jeu de 32. Réponse : $C_4^2 \times C_4^3$ (Première étape : on choisit deux as : $C_4^2$ possibilités ; Deuxième étape : on choisit trois rois : $C_4^3$ possibilités ; Ensuite c'est le principe multiplicatif).

## 1.5 Propriétés

1. Si l'ensemble E comporte $n$ éléments, prendre $p$ .éléments dans E est équivalent à en laisser $n-p$. Il y a donc autant de façons de choisir $p$ .éléments parmi $n$ que d'en laisser $n-p$. Or, il y a $C_n^p$ façons de choisir $p$ .éléments parmi $n$ et il y a $C_n^{n-p}$ façons de délaisser $n-p$ éléments parmi $n$. On a donc $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

2. Il n'y a qu'une seule façon de ne choisir aucun élément parmi n. On a donc $\boxed{C_n^0 = 1}$

3. De même : $\boxed{C_n^1 = n \text{ et } C_n^n = 1}$

4. Soit E un ensemble comportant $n$ éléments et soit $\alpha$ un élément de E. Répartissons les parties de $E$ à $p$ éléments en 2 classes : celles qui contiennent $\alpha$ et celles qui ne le contiennent pas. Dans la première classe il y a $C_{n-1}^{p-1}$ parties (il faut choisir p-1 éléments pour compléter $\alpha$ et les choisir parmi les $n-1$ restants puisque $\alpha$ est déjà choisi) et dans la deuxième il y en a $C_{n-1}^p$ (il faut choisir $p$ .éléments parmi $n-1$ puisqu'on ne veut pas $\alpha$). Comme il y a en tout $C_n^p$ parties de $E$ à $p$ éléments, on a
$$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}$$

Cette dernière formule permet de construire le célèbre triangle de PASCAL:

$$\begin{array}{llllll}
C_0^0 = 1 & & & & & \\
C_1^0 = 1 & C_1^1 = 1 & & & & \\
C_2^0 = 1 & C_2^1 = 2 & C_2^2 = 1 & & & \\
C_3^0 = 1 & C_3^1 = 3 & C_3^2 = 3 & C_3^3 = 1 & & \\
C_4^0 = 1 & C_4^1 = 4 & C_4^2 = 6 & C_4^3 = 4 & C_4^4 = 1 & \\
C_5^0 = 1 & C_5^1 = 5 & C_5^2 = 10 & C_5^3 = 10 & C_5^4 = 5 & C_5^5 = 1
\end{array}$$

Chaque nombre du triangle s'obtient en ajoutant le nombre écrit au dessus de lui et son voisin de gauche.

## 1.6 Formule du binôme de NEWTON

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$$

**Démonstration.** On a : $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots..(a+b)}_{n\ fois}$

Le développement de ce produit donne une somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ (on prend $a$ dans $k$ facteurs et $b$ dans les $n-k$ restants) , $k$ prenant toutes les valeurs entières de 0 à $n$.
Or il y a $C_n^k$ façons de choisir $k$ facteurs parmi $n$ , donc le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est $C_n^k$.
D'où : $(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ..... + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0$.