Courbes en paramétrées

1 Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. A tout réel t de $\mathcal{D}$ on associe dans le plan muni du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ noté $M(t)$ et on se propose de construire l'ensemble $\mathcal{C}$ de ces points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathcal{D}$.

Définition 1 Le système $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ $t \in \mathcal{D}$ est appelé représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$, la variable t s'appelant aussi le paramètre

2 Tangente

Théorème 1 Si $f'(a) \neq 0$ ou $g'(a) \neq 0$ (si on n'a pas $f'(a) = g'(a) = 0$), le vecteur $\vec{V}_a \left| \begin{array}{l} f'(a) \\ g'(a) \end{array}\right.$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(a)$.

Exemple 1 Si $\mathcal{C}$: $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) = t^2 + t + 1 \\ y = g(t) = t^3 - 1 \end{array}\right.$ on a $f'(t) = 2t + 1$ et $g'(t) = 3t^2$.

Au point $M(0)$ la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de vecteur directeur $\vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} f'(0) = 2 \\ g'(0) = 0 \end{array}\right.$

La tangente est "horizontale".

Remarque 1 Si $\mathcal{C}$ admet une tangente au point de paramètre a et si $f'(a) \neq 0$, le coefficient directeur de cette tangente est $\dfrac{g'(a)}{f'(a)}$

3 Point double

Définition 2 A est point double de $\mathcal{C}$ s'il existe exactement deux valeurs distinctes a et b du paramètre pour lesquelles les points $M(a)$ et $M(b)$ sont confondus avec A.

Remarque 2 On obtient les valeurs du paramètre correspondant à un point double en résolvant le système $\left\{\begin{array}{l} f(a) = f(b) \\ g(a) = g(b) \\ a \neq b \end{array}\right.$

Exemple 2 Le point $A(12, 0)$ est point double de $\mathcal{C}$: $\left\{\begin{array}{l} x = 2t^2 \\ y = t^3 - 6t \end{array}\right.$ $t \in [-3; 3]$

On l'obtient pour les valeurs $t = \sqrt{6}$ et $t = -\sqrt{6}$ du paramètre

4 Méthode d'étude

1. Etudier les variations de f et g sur $\mathcal{D}$.
2. Reporter les résultats obtenus dans un tableau de variations.
3. Préciser les points remarquables (points d'intersection avec les axes, points doubles).
4. Tracer $\mathcal{C}$ avec précision.