Développements limités

1 Définitions

Définition 1 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (son ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]-\alpha;\alpha[$ avec $\alpha > 0$).
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- $P_f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est la partie régulière du développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0.
- $x^n \varepsilon(x)$ est le terme complémentaire.

Théorème 1 Si une fonction possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, il est unique.

Conséquence : Dans le développement limité d'une fonction paire (resp. impaire), la partie régulière ne comporte que des puissances paires (resp. impaires)

2 Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

3 Opérations sur les développements limités

Théorème 2 (Troncature) Si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ alors, pour tout $p \le n$, on a $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + x^p \varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

On dit que $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p$ est obtenu par troncature à l'ordre p du polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. On ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à p.
On notera $\mathrm{tr}_n[P(x)]$ la troncature à l'ordre n du polynôme $P(x)$.

Théorème 3 (Substitution) Si $f(x) = P_f(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors :

1. $f(\lambda x) = P_f(\lambda x) + x^n \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$
2. $f(x^p) = P_f(x^p) + x^{np} \varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ *(ordre np !!!)*

Remarque 1 $f(x^p) = \mathrm{tr}_n [P_f(x^p)] + x^n \varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$

Théorème 4 (Somme)
Si $f(x) = P_f(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = P_g(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

$$\boxed{f(x) + g(x) = P_f(x) + P_g(x) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Théorème 5 (Produit)
Si $f(x) = P_f(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = P_g(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

$$\boxed{f(x) . g(x) = \mathrm{tr}_n [P_f(x) . P_g(x)] + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Théorème 6 (Intégration)
Si $f(x) = P_f(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et si F est une primitive de f :

$$\boxed{F(x) = F(0) + \int_0^x P_f(t)\, dt + x^{n+1} . \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Exercice 1 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3e^{2x} + \sin(x^2)$
2. $f(x) = \sin 2x . \cos 4x$
3. $f(x) = \sqrt{4+x} . \ln(1+x)$
4. $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{1+x^2}$
5. $f(x) = \arctan x$
6. $f(x) = \arcsin x$

4 Applications des développements limités

4.1 Calcul de limites

Exercice 2 Calculer

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x \ln x}{1-x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4.2 Position relative d'une courbe et de sa tangente au voisinage d'un point

4.2.1 Rappels

f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0)$ si et seulement si :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

C'est, par définition, le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)\, x + f(0)$$

On reconnaît la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - [f'(0)\, x + f(0)]$$

- Si $d(x) > 0$ la courbe est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
- Si $d(x) < 0$ la courbe est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

4.2.2 Etude au voisinage de 0.

Si on connaît un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre $p > 1$

$$f(x) = \alpha + \beta x + \lambda x^p + x^p\,\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

la troncature à l'ordre 1 donne :

$$f(x) = \alpha + \beta x + x\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

C'est le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
Ce développement limité étant unique : $\alpha = f(0)$ et $\beta = f'(0)$.
La droite d'équation $y = \alpha + \beta x$ est donc tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
De plus, $d(x) = f(x) - [\alpha + \beta x] = \lambda x^p + x^p\,\varepsilon(x) = \lambda x^p\left[1 + \frac{1}{\lambda}\,\varepsilon(x)\right]$
$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\,\varepsilon(x)\right] = 1$ et donc $1 + \frac{1}{\lambda}\varepsilon(x)$ est positif (puisque aussi proche de 1 que l'on veut), à condition de choisir x suffisamment proche de 0.
En résumé, **au voisinage de** 0, $d(x)$ a même signe que λx^p.

Exercice 3 Etudier la position relative de la courbe d'équation $y = f(x) = (x+1)\,e^{-2x}$ et de sa tangente au point $A(0;1)$. On commencera par déterminer un développement limité de f au voisinage de 0 à un ordre supérieur à 1.

Exercice 4 Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x) = x - 3 - 2\ln(x+1)$ et de sa tangente au point $A(0;-3)$.

4.3 Asymptotes et position relative avec la courbe au voisinage de l'infini

Poser $t = \dfrac{1}{x}$ et utiliser les développements limités pour obtenir

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = 0$$

Alors :

1. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
   Donc la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ vers $+\infty$
2. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe de

$$d(x) = f(x) - (ax+b)$$

   Si $d(x) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ et si $d(x) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ.

Au voisinage de $+\infty$, $d(x) = \frac{c}{x^p} + \frac{1}{x^p}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right) = \frac{c}{x^p}\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{x^p}\right)\right]$ a même signe que $\frac{c}{x^p}$
On procède de façon analogue au voisinage de $-\infty$.

Exercice 5 Etudier au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ le comportement de la fonction f définie par $f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - x}$