Equations différentielles

1 Equation linéaire du premier ordre

1.1 Equation linéaire homogène du premier ordre

$$\boxed{y' = a(x)y} \qquad (H)$$

Théorème 1 Si a est une fonction dérivable sur l'intervalle I, la solution générale de l'équation homogène $y' = a(x)y$ est $y = Ce^{A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et où C est une constante réelle quelconque.

Exercice 1 Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $xy' + 2y = 0$.

1.2 Equation linéaire du premier ordre avec second membre

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)} \qquad (E)$$

Théorème 2 La solution générale de $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ peut s'obtenir en ajoutant à une solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation homogène associée $(H) : y' = a(x)y$.

Exercice 2 Soit l'équation différentielle $(E) : xy' - 2y = 2\ln x - 3$.

1. Montrer que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x$ est solution de (E).
2. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 3 Soit l'équation différentielle $(E) : y' + xy = x^2e^{-x}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$.

1.3 Si on ne trouve pas de solution particulière de (E)

Pour résoudre l'équation $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ on pose $y = ze^{A(x)}$ où A est une primitive de a sur I et où z est une fonction inconnue. Cette méthode de résolution s'appelle méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle $(E) : xy' + y = \cos x$

1. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de l'équation $(H) : xy' + y = 0$
2. Déterminer, par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de (E).
3. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de l'équation (E).

2 Equation linéaire du deuxième ordre

2.1 Equation linéaire homogène du deuxième ordre

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad (H)$$

Définition 1 $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de (H) : $ay'' + by' + cy = 0$

Théorème 3 Lorsque l'équation caractéristique a une racine double r, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\boxed{y = (Ax + B)e^{rx}}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

Théorème 4 Lorsque l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\boxed{y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

Théorème 5 Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\boxed{y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$
4. $y'' + 4y = 0$

2.2 Equation linéaire du deuxième ordre avec second membre

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)} \qquad (E)$$

Théorème 6 La solution générale de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$ peut s'obtenir en ajoutant à une solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation homogène associée (H) : $ay'' + by' + cy = 0$

2.3 Recherche d'une solution particulière de (E)

1. $f(x)$ est un polynôme
   On cherche une solution particulière de la forme $y = P(x)$ avec P polynôme dont on commencera par déterminer le degré.
   Remarque : $\deg(aP'' + bP' + cP) = \begin{cases} \deg P \text{ si } c \neq 0 \\ \deg P' \text{ si } c = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

2. $f(x) = P(x)e^{kx}$ avec P polynôme (une constante est un polynôme particulier)
   On pose $y = ze^{kx}$ et on est alors ramené au cas précédent.

3. $f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$
   Chercher une solution de la forme
   $y = \begin{cases} x(\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x) \text{ si } i\omega \text{ est racine de l'équation caractéristique} \\ \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$
2. $y'' + y' = 1 - 2x$
3. $y'' - 2y' = x^2$
4. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$
5. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$
6. $y'' + y' - 2y = xe^{x}$
7. $y'' - y = \cos x$
8. $y'' + y = \cos x$
9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \sin x$