5 Exercices

5.1 Calculs sous forme algébrique

Exercice 11 Calculer i^n pour tout entier naturel n de 1 à 12.

Exercice 12 Calculer $(1+2i)^3 \quad ; \quad (1+i)^4-(1-i)^4 \quad ; \quad (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

Exercice 13 Soit $\omega = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1+\omega+\omega^2$ puis ω^3

Exercice 14 Simplifier les nombres complexes suivants : $(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi)$

$$z_1 = \frac{a+ib}{a-ib} \qquad z_2 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \qquad z_3 = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$$

Exercice 15 Déterminer tous les complexes z tels que $z = \overline{z^2}$

Exercice 16 Déterminer tous les complexes z tels que $z = \overline{z^3}$

5.2 Calculs sous forme trigonométrique

Exercice 17 Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1 = -i$
$z_2 = -1+i$
$z_3 = -1-i$
$z_4 = 2$
$z_5 = 3i$
$z_6 = 1+i\sqrt{3}$
$z_7 = \sqrt{3}-i$
$z_8 = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$
$z_9 = -2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$
$z_{10} = \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$
$z_{11} = -2(1-i)$
$z_{12} = \sqrt{2}(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

Exercice 18 Simplifier $z_1 = \dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\alpha-i\sin\alpha}$; $z_2 = (1+i)^8$ et $z_3 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^7$

Exercice 19 Soit $z = \sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ où $i = [1;\frac{\pi}{2}]$. Calculer z^2 et déterminer un argument de z^2 puis de z

5.3 Equations dans $\mathbb{C}$

Exercice 20 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$(3-i)z+2-3i = 0$
$(1+i)z+2-i = 0$
$(1+i)z+(2-3i)\bar{z}-2+5i = 0$
$4\bar{z}-(6+8i)z-i = 0$
$|z-i| = |iz-1| = |z-iz|$
$z+|z| = 3+4i$
$|iz+1+i| = 1$
$z+\bar{z} = |z|$

$$\begin{cases} z_1.z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1+2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z_1+z_2 = 4 \\ 2i\bar{z}_1+\bar{z}_2 = 0 \end{cases}$$

5.4 Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2+z+1 = 0$
$z^2-4z+13 = 0$
$z^2-3z+4 = 0$
$9z^2-12z+4 = 0$
$2z^2+2z+5 = 0$
$z^4-30z^2+289 = 0$

Exercice 22 Soit $P(z) = z^3+az^2+bz+c$ où a, b et c sont trois nombres complexes.

1. Déterminer a, b et c sachant que $P(2i) = 0$; $P(i) = -2-i$ et $P(1) = 1-2i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $u^2 - 2u + 2 = 0$.
3. Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 23 Soit l'équation (E) : $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$
Montrer que si α est racine de (E) alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est racine de (E)
Montrer que i est racine de l'équation.
Trouver les autres racines de l'équation (E).

5.5 Applications des formules de Moivre et d'Euler

Exercice 24

1. Ecrire la formule de Moivre pour $n = 2$.
   En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ retrouver les formules $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
   En déduire $\sin^2\theta$ et $\cos^2\theta$ en fonction de $\cos 2\theta$.
2. En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ retrouver les formules donnant $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
   En déduire $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$ et $\cos^3\theta = \dfrac{3}{4}\cos\theta + \dfrac{1}{4}\cos 3\theta$

Exercice 25 Linéariser les expressions suivantes :

$\sin^3 x$	$\cos^2 x \sin^3 x$	$\cos x \cos 5x$
$\cos^3 x$	$\sin x \cos 5x$	$\sin 3x \sin 5x$

5.6 Nombres complexes et géométrie

Exercice 26

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z - 2 = 0$
   On notera z_1 et z_2 les solutions, z_2 étant celle de partie réelle positive.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$
   On notera z_3 et z_4 les solutions, z_4 étant celle de partie imaginaire positive.
3. Soient A, B, C, D les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
   Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est un parallélogramme.
   Montrer qu'en fait, $ACBD$ est un carré.

Exercice 27 Soit $P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
   On notera z_1, z_2, z_3 les solutions de cette équation.
3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
   Quelle est la nature du triangle ABC.

Exercice 28 i désigne le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$
Soient $z_1 = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$; $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$.
Soient M_1, M_2 et M_3 les images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer les modules de z_1, z_2 et z_3. En déduire une équation du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par M_1, M_2 et M_3.
2. Donner un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.
3. Calculer le nombre complexe $Z = \dfrac{z_1^3 . z_2^3}{z_3^6}$. Montrer que $Z^4 = -1$
4. Soit N l'image de Z. Représenter M_1, M_2, M_3, $\mathcal{C}$ et N dans le repère donné.