5 Exercices

Exercice 1 Construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 3t \end{cases} \quad t \in [-1;3]$

Exercice 2 Construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases} \quad t \in [-2;2]$
Comparer les points correspondant aux paramètres t et $-t$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

Exercice 3 Soit $\mathcal{C}$ la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} f(t) = (t-1)^2 \\ g(t) = t^2 e^{-t} \end{cases} \quad t \in [-1;2]$.

1. Etudier les variations de f et g sur $[-1;2]$.
2. Déterminer les coordonnées des points de paramètres $-1; 0; 1$ et 2 ainsi qu'un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en chacun de ces points .
3. Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 4 On se place dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4cm.
Soient $B(4;0)$ et $Q(4;2)$. Pour $t \in [0;1]$, on note :

- G_1 le barycentre du système $\{(O; 1-t); (Q; t)\}$
- G_2 le barycentre du système $\{(Q; 1-t); (B; t)\}$
- M le barycentre du système $\{(G_1; 1-t); (G_2; t)\}$

1. Construire les points G_1, G_2 et M pour $t = \dfrac{1}{4}$
2. On note $(x; y)$ les coordonnées du point M.
   Montrer que $x = 8t - 4t^2$ et $y = 4t - 4t^2$.
3. Lorsque $t \in [0;1]$ le point M décrit une courbe $\mathcal{C}$. Construire $\mathcal{C}$

Exercice 5 On se place dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

Soit $\mathcal{C}$ l'arcc de courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) = t + \dfrac{1}{t} - \dfrac{17}{4} \\ y = g(t) = \ln t \end{cases} \quad t \in [1;4]$

1. Etudier les variations de f et g sur $[1;4]$.
2. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux extrêmités de cet arc.
3. On admet que l'aire de la partie $\mathcal{D}$ du plan délimitée par $\mathcal{C}$ et les deux axes de coordonnées est donnée, en unités d'aires, par
$$\mathcal{A} = \int_1^4 f'(t)\, g(t) \; dt$$
Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en cm^2.

Exercice 6 Construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(\theta) = -2\cos\theta \\ y = g(\theta) = 4\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
Montrer ensuite que $\forall \theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ *(équation d'une ellipse)*

Exercice 7 Après avoir trouvé une symétrie, construire la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = f(\theta) = -2\cos\theta \\ y = g(\theta) = 4\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$