

5 Exercices

Exercice 6 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

4. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

5. $f(x) = \sqrt{1 + \frac{x}{3}}$

6. $f(x) = x^2\sqrt{3+x}$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}$

8. $f(x) = \frac{\sin 3x}{e^{2x}}$

9. $f(x) = 2 \sin x \cos x$

10. $f(x) = \frac{\ln(2+4x)}{\sqrt{2+6x}}$

11. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^3}}$

Exercice 7 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{1 - \cos x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + 1 - e^x}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - xe^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 + x - 2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^2 - e^x}{1 - \sqrt{x-1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x \right]$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x(x+1)}}{x - xe^{1/x}}$

Exercice 8 Etudier la position relative de la courbe d'équation $y = f(x)$ et de sa tangente au point A d'abscisse 0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

2. $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$

3. $f(x) = x^2 - 2e^x$

4. $f(x) = x^2 + 2 \ln(1+x)$

5. $f(x) = x^2 - \frac{1}{1+x}$

6. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \sqrt{1+x}$

7. $f(x) = \frac{1 + \ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

8. $f(x) = e^{2x} \cos 3x$

9. $f(x) = \arctan x$

10. $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

Exercice 9 Etudier au voisinage de l'infini le comportement de la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Exercice 10 Etudier au voisinage de l'infini le comportement de la fonction f définie par

$$f(x) = (x^2 + x) e^{\frac{1}{x}}$$

On montrera que la courbe \mathcal{P} d'équation $y = x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ est asymptote à \mathcal{C}_f vers $+\infty$

Exercice 11 Etudier au voisinage de l'infini le comportement de la fonction f définie par

1. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

2. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

3. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$