3 Exercices

3.1 Echantillonnage

Exercice 1 Une machine fabrique des disques pleins en grande série. On suppose que la variable aléatoire X qui, à chaque disque tiré au hasard, associe son diamètre, suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu = 12,8$ mm et $\sigma = 2,1$ mm.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire $\bar{X}$ qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de taille $n = 49$, associe la moyenne des diamètres des disques de cet échantillon ?
2. Déterminer un intervalle centré en 12,8 tel que la variable aléatoire $\bar{X}$ prenne ses valeurs dans cet intervalle avec la probabilité 0,95.
3. On se propose de prélever un échantillon aléatoire non exhaustif de taille n. Déterminer n pour que la moyenne des diamètres des disques prélevés ne s'écarte pas de 12,8 de plus de 0,2 mm avec une probabilité d'au moins 0,95.

Exercice 2 Un stock est composé de pièces cylindriques dont la moyenne des diamètres est 15 mm et l'écart-type $0,35$ mm. On prélève un échantillon non exhaustif de 200 pièces.

1. Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon soit comprise entre 14,95 et 15,05 mm ?
2. Quel devrait être l'effectif de l'échantillon pour que sa moyenne soit comprise entre 14,95 et 15,05 avec une probabilité au moins égale à 0,99 ?

Exercice 3 Une machine fabrique des pièces en grande série. On suppose que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce tirée au hasard, associe sa longueur, suit la loi normale de moyenne $m = 65,5$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,2$ mm.

1. Une pièce est utilisable si sa longueur ℓ vérifie $65 < \ell < 66$.
   Quelle est la probabilité qu'une pièce soit utilisable ?
2. On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon non exhaustif de 50 pièces, associe la moyenne des longueurs des pièces de cet échantillon.
   (a) Donner un intervalle centré en 65,5 tel que la variable aléatoire $\bar{X}$ prenne ses valeurs dans cet intervalle avec une probabilité de 0,98.
   (b) Quel est le nombre minimal de pièces à prélever pour que la moyenne des longueurs des pièces tirées soit comprise entre 65,49 et 65,51 avec une probabilité au moins égale à 0,98 ?

Exercice 4 Une machine fabrique des pièces de forme circulaire en grande série. A chaque pièce tirée au hasard, on associe son diamètre en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire X. On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 150$ et d'écart-type σ.
On a constaté que 8% des pièces de la production ont un diamètre supérieur à $150,3$ mm.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 150}{\sigma}$? Etablir que $\sigma = 0,21$
2. Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans cette fabrication ait un diamètre compris entre 149,79 et 150,42 mm ?
3. Soit M la variable aléatoire qui associe, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de n pièces, la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon.
   (a) Déterminer la valeur minimale de n pour que la moyenne des diamètres des pièces de l'échantillon soit supérieure à 149,9 mm avec une probabilité au moins égale à 0,95.
   (b) On suppose que $n = 400$. Déterminer h pour que $P(m - h \leq M \leq m + h) = 0,95$.

Exercice 5 Dans une population on constate qu'il naît 52 % de filles.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille 900.

1. Quelle est la probabilité d'avoir, dans cet échantillon un pourcentage de garçons compris entre 46 et 50 % ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir, dans cet échantillon un pourcentage de filles supérieur à 55% ?

Exercice 6 Un candidat a obtenu 51 % des suffrages exprimés lors d'une élection.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir, dans un échantillon aléatoire non exhaustif de taille 100 prélevé parmi les suffrages exprimés, strictement moins de 50 % de voix pour ce candidat.
2. Même question avec un échantillon de taille 2000

Exercice 7 Une usine fabrique des machines dont on assure que 90 % n'ont aucune défaillance au cours des 900 premières heures de fonctionnement.
Soit F la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire non exhaustif de 25 machines associe la proportion de machines de cet échantillon subissant une défaillance au cours des 900 premières heures.
On suppose que F suit une loi normale.

1. Quels sont les paramètres de la loi normale suivie par F ?
2. Une entreprise utilise 25 machines.
   Quelle est la probabilité d'avoir dans cette entreprise au plus 10 % de machines ayant subi une défaillance au cours des 900 premières heures ?
3. Déterminer k tel que $P(F \geqslant k) = 0,95$

3.2 Estimation

Exercice 8 Dans une population de pièces circulaires, on extrait un échantillon aléatoire non exhaustif de cinq pièces.
Les mesures des diamètres de ces pièces ont donné : 5,32 ; 5,36 ; 5,34 ; 5,35 ; 5,33.
Donner une estimation ponctuelle de la moyenne, de la variance, et de l'écart-type de la population.

Exercice 9 Une machine remplit des sacs de ciment.
La variable aléatoire X qui, à un sac de ciment choisi au hasard, associe sa masse, suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 0,1$ kg.
On prélève un échantillon de 25 sacs et on constate que la moyenne des masses des sacs de cet échantillon est de 34,96 kg.
Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de μ.

Exercice 10 On mesure les poids d'un échantillon aléatoire non exhaustif de 100 élèves d'un lycée.

On obtient :

Poids	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Effectif	3	5	6	8	10	12	15	14	12	11	4

Déterminer un intervalle de confiance à 95 % du poids moyen d'un lycéen.

Exercice 11 Un sondage effectué sur 900 personnes choisies de manière aléatoire et non exhaustive dans la population française a indiqué que 300 d'entre elles possèdent un four micro-ondes.
Déterminer un intervalle de confiance à 95 % du pourcentage de personnes de la population française possédant un four micro-ondes.

Exercice 12 Dans un échantillon aléatoire non exhaustif de 500 pièces d'une production, on a trouvé 65 pièces défectueuses.
Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de pièces défectueuses dans la production.

Exercice 13 Soit X la variable aléatoire qui associe, à toute pièce d'une production choisie au hasard, sa longueur. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; 4)$. Sur un échantillon (aléatoire non exhaustif) de 25 pièces de cette production on a trouvé que la moyenne des longueurs était $\bar{x} = 16$.

1. Déterminer un intervalle de confiance à 90 % de μ.
2. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que cet intervalle soit réduit de moitié.

Exercice 14 Une entreprise dispose de 100 camions pour transporter sa production.
Sur une période de 30 jours choisis au hasard, elle relève le nombre suivant de camions en panne :
5,5,6,4,6,6,8,3,5,5,5,4,3,6,5,6,4,7,6,6,5,4,3,6,5,4,5,4,5,5.

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s du nombre de camions en panne chaque jour pour l'échantillon étudié.
2. A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, proposer une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart-type σ du nombre de camions en panne chaque jour pour la population correspondant aux jours ouvrés de l'année.
3. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne μ de la population.

Exercice 15 Soit X la variable aléatoire qui associe, à toute pièce d'une production choisie au hasard, sa longueur. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; 7)$. Quelle taille d'échantillon faut-il choisir pour que l'intervalle de confiance de la moyenne μ ait une longueur inférieure à 4 avec un coefficient de confiance de 0,9.

Exercice 16 Un sondage électoral sur 100 électeurs a donné 52 électeurs favorables au candidat X. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % du pourcentage d'électeurs de la population favorables au candidat X.

Exercice 17 Un contrôle de qualité portant sur 500 articles a révélé 27 articles défectueux. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion d'articles défectueux, au risque de 5 %.

Exercice 18 Soit p la proportion (inconnue) d'individus d'un pays nés durant le mois de juillet. On prélève de manière aléatoire et non exhaustive un échantillon de 850 individus de ce pays et on constate que dans cet échantillon, 73 sont nés en juillet.
On note F la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire et non exhaustif de taille 850 associe la proportion d'individus de cet échantillon nés en juillet.

1. Déterminer $E(F)$ et $\sigma(F)$.
2. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de p.

Exercice 19 On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis six moix. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

1. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service..
   On suppose que $F \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$ où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
   Déterminer un intervalle de confiance de p avec le coefficient de confiance 95 %.
3. On considère l'affirmation suivante :
   "Le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente".
   Est-elle vraie ?