3 Exercices

3.1 Equations du premier ordre

Exercice 7 On considère l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 1 - 2x^2 \tag{E}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y' - 2xy = 0$
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x$ est solution de (E).
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Exercice 8 On considère l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{x}y = x \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : y' - \frac{1}{x}y = 0$
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x^2$ est solution de (E).
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, 2)$

Exercice 9 On considère l'équation différentielle

$$\left(1 + x^4\right) y' - x^3 y = x^5 - x^3 + 2x + 1 \tag{E}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : \left(1 + x^4\right) y' - x^3 y = 0$
2. Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 2)$

Exercice 10 On considère l'équation différentielle

$$xy' - 2y = \ln x \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : xy' - 2y = 0$
2. Déterminer les réels a, b tels que la fonction g définie par $g(x) = a \ln x + b$ soit solution de (E).
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, 2)$

Exercice 11 On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = x^3 - \frac{1}{2}x \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : x^2 y' - y = 0$
2. Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, 2)$

Exercice 12 On considère l'équation différentielle

$$y' + y = e^{-x} \tag{E}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y' + y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 1)$

Exercice 13 On considère l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \tag{E}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y' + y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 0)$

Exercice 14 On considère l'équation différentielle

$$xy' - 2y = x^2 \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : xy' - 2y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, 1)$

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{x^2}{x + 1} \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : xy' + y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, \ln 2)$

Exercice 16 On considère l'équation différentielle

$$xy' + y = \cos x \tag{E}$$

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $(H) : xy' + y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Exercice 17 On considère l'équation différentielle

$$(e^x + 1)\, y' - e^x y = (e^x + 1)^2 \tag{E}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : (e^x + 1)\, y' - e^x y = 0$

2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1,2)$

Exercice 18 On considère l'équation différentielle

$$xy' - y = x^2(x+1) \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $(H) : xy' - y = 0$
2. Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante
3. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$

Exercice 19 On considère l'équation différentielle

$$(x+2)y' + y = \frac{1}{x+1} \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation $(H) : (x+2)y' + y = 0$
2. Déterminer une fonction z définie sur $]-1;+\infty[$ telle que la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{z(x)}{x+2}$ soit solution de (E).
3. Résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0,1)$

Exercice 20 On considère l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{e^x - 1} \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $(H) : y' + y = 0$
2. Déterminer une fonction h définie sur $]0;+\infty[$ telle que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{h(x)}{e^x}$ soit solution de (E).
3. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(\ln 2, 0)$

Exercice 21 On considère l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{2x^2}{2x+1} \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $(H) : xy' - y = 0$
2. Soit h une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $h'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$
   Montrer que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = xh(x)$ est solution de (E).
3. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1,\ln 3)$

3.2 Equations du deuxième ordre

Exercice 22 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice 23 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice 24 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

Exercice 25 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2e^x$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y'' - 2y' + y = 0$
2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2e^x$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E)
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(2) = 0$

Exercice 26 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x + 4$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y'' + 2y' + y = 0$
2. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x + 2$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire la solution générale de (E)
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$

Exercice 27 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y'' + 2y' + y = 0$
2. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution particulière de (E).
3. Déterminer la solution de (E) dont la représentation graphique dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ passe par O et admet comme tangente en O la droite $\left(O; \vec{i}\right)$.

Exercice 28 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\,e^{-x}$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y'' - y' - 2y = 0$
2. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ soit solution particulière de (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = f'(0) = 1$

Exercice 29 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(H) : y'' - 2y' + 2y = 0$

2. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution particulière de (E).

3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$

Exercice 30 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(H) : y'' - 4y' + 3y = 0$$

1. Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle
$$(E_1) : y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 8x$$

2. Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation différentielle
$$(E_2) : y'' - 4y' + 3y = xe^x$$

3. Montrer que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle
$$(E) : y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 8x + xe^x$$

4. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle
$$(E) : y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 8x + xe^x$$

5. Déterminer la solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3.3 Equations supplémentaires

Exercice 31 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = e^{-x}$
2. $y' + y = \dfrac{1}{e^x - 1}$ sur $]0; +\infty[$
3. $y' - 2y = 4x - 2$
4. $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
5. $y' + xy = x^2 e^{-x}$
6. $y' + y = 1 - e^{-x}$
7. $\left(1 + x^4\right) y' - x^3 y = x^5 - x^3 + 2x + 1$
8. $xy' - 2y = \ln x$ sur $]0; +\infty[$
9. $xy' - y = 1 + x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$
10. $x^2 y' - y = x^3 - \frac{1}{2}x$ sur $]0; +\infty[$
11. $xy' - 2y = -2\ln x$ sur $]0; +\infty[$
12. $xy' - 2y = x^2$ sur $]0; +\infty[$
13. $xy' + y = \dfrac{2x^2}{2x + 1}$ sur $]0; +\infty[$
14. $(e^x - 1) y' + e^x y = 1$ sur $]0; +\infty[$
15. $xy' + y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ sur $]0; +\infty[$
16. $xy' - y = -x^2 e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$
17. $(1 + x) y' - 2y = \ln(1 + x)$ sur $]-1; +\infty[$
18. $(\ln x) y' + \dfrac{y}{x} = 1$ sur $]1; +\infty[$.
19. $y'' - 3y' + 2y = 4$
20. $y'' + 2y' + y = x$
21. $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + 1$
22. $y'' + 9y = 2\cos 4x$
23. $y'' + 9y = 2\cos 3x$
24. $y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$
25. $y'' - y' - 6y = -5e^{-2x}$
26. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
27. $2y'' - 5y' + 2y = 4x^2 - 16x - 3$
28. $y'' + 4y' + 5y = 10x - 2$
29. $y'' + 4y = \sin x$
30. $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
31. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$