3 Exercices

3.1 Résolution d'équations

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 4$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle $[-1; 2]$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\dfrac{3}{x} + x - 4\ln x$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $]0; 3[$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $[3; 10]$
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $]10; +\infty[$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -2\ln x + \dfrac{5}{2}x^2 - 9x$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution α dans $[3; 4]$
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} de α.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty]$ par $f(x) = 4x^2e^x - 1$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée de $f(-2)$.
   En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
   Déterminer la valeur approchée à 10^{-1} par défaut de ces solutions.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \ln\left(1 + x^2\right)$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[0; 10]$
3. Déterminer une encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3.2 Fonction réciproque

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$
Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.
Tracer la courbe représentative de f, puis celle de f^{-1}, dans un repère convenablement choisi.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$
Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.
Tracer la courbe représentative de f, puis celle de f^{-1}, dans un repère convenablement choisi.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.
2. Comparer $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\left[1; \sqrt{5}\right]$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Montrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + x^2}{2x}$

3.3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 11 Déterminer les ensembles de définition, des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin(2x)$
2. $f(x) = \arcsin(x-1)$
3. $f(x) = \arcsin(3x-5)$
4. $f(x) = \arccos(5x)$
5. $f(x) = \arccos(1-x)$
6. $f(x) = \arccos(2-3x)$
7. $f(x) = \arctan(3x)$
8. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f(x) = \arctan\left(x^2\right)$

Exercice 12 Calculer les dérivées des fonctions définies dans l'exercice précédent, après avoir indiqué les ensembles de dérivabilité.

Exercice 13 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{1+x^2}dx$

Exercice 14 $f(x) = \arcsin(-x) + \arcsin x$; $g(x) = \arccos(-x) + \arccos x$; $h(x) = \arctan(-x) + \arctan x$

1. Calculer, sur des ensembles à préciser, $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$.
2. En déduire :
   (a) $\forall x \in [-1;1] : \arcsin(-x) = -\arcsin x$
   (b) $\forall x \in [-1;1] : \arccos(-x) = \pi - \arccos x$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(-x) = -\arctan x$

Exercice 15 On pose pour tout x appartenant à $[-1;1]$: $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire que pour tout x appartenant à $[-1;1]$: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 16 Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

1. Calculer $f'(x)$
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 17 Montrer que pour tout x de $[-1;1]$ on a les relations

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

3.4 Fonctions hyperboliques

Exercice 18 Montrer que la fonction sh est impaire et que la fonction ch est paire.

Exercice 19 On pose $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

Démontrer, pour tout x réel, : $(\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Exercice 20 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 2\operatorname{sh} x \, dx \ ; \ J = \int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \, dx \ ; \ K = \int_0^1 \left(1 - \operatorname{th}^2 x\right) \, dx$$

le résultat de J est-il surprenant ? Pourquoi ?

Exercice 21 Étudier et représenter graphiquement les fonctions hyperboliques.