

## 5 Exercices

**Exercice 1** Calculer  $I = \int_0^1 2x \, dx$  ;  $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x \, dx$  ;  $K = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$  ;  $L = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$

**Exercice 2** Lorsque le degré du numérateur d'une fraction rationnelle n'est pas strictement inférieur à celui du dénominateur, il faut commencer par effectuer la division euclidienne.

Exemple :  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  pousse à la division pour obtenir :  $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$

Utiliser cette remarque pour calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx \quad 2. \int_0^1 \frac{1-4x}{1+2x} \, dx \quad 3. \int_0^1 \frac{4x^2}{2x+1} \, dx \quad 4. \int_0^7 \frac{x+3}{x-3} \, dx$$

**Exercice 3** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 \left( x+1 + \frac{1}{x+1} \right) dx & 7. \int_{\pi/3}^{\pi/4} \tan t \, dt & 13. \int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \\ 2. \int_0^{\pi/6} 2 \cos 3x \, dx & 8. \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx & 14. \int_1^4 \frac{x^3+1}{\sqrt{x}} dx \\ 3. \int_0^{\pi} (5 \cos 2x - e^{5x} + 3) dx & 9. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx & 15. \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \\ 4. \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt & 10. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx & 16. \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx \\ 5. \int_0^1 (2x + e^{2x} + e^{-x}) dx & 11. \int_2^4 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - x + 3)^3 dx & 17. \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^x} dx \\ 6. \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt & 12. \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx & \end{array}$$

**Exercice 4** Calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$\begin{array}{llll} 1. \int_1^e x \ln x \, dx & 5. \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx & 9. \int_0^{\pi} 2x \sin 3x \, dx & 13. \int_0^1 \arctan x \, dx \\ 2. \int_1^2 x^3 \ln 4x \, dx & 6. \int_1^e \ln x \, dx & 10. \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx & 14. \int_0^1 x \arctan x \, dx \\ 3. \int_0^1 (x+1) e^{-2x} dx & 7. \int_1^2 (x^2+1) \ln 2x \, dx & 11. \int_0^1 x e^{kx} dx \, (k \neq 0) & 15. \int_0^{1/2} \arcsin x \, dx \\ 4. \int_0^1 x e^x dx & 8. \int_0^{\pi} x \cos x \, dx & 12. \int_0^1 \ln(1+t) \, dt & 16. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t \sin t} \end{array}$$

Pour la dernière intégrale on commencera par calculer la dérivée de  $t \mapsto \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right|$

**Exercice 5** Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives :

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^1 t^2 e^t \, dt & 3. \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \\ 2. \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \, dx & 4. \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 3x \, dx \end{array}$$

**Exercice 6** Déterminer la primitive de  $\arcsin x$  qui s'annule en 0

Rappel :  $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  vérifie  $F'(x) = f(x)$  et  $F(a) = 0$ .

**Exercice 7** Calculer à l'aide du changement de variable indiqué :

1.  $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$  ( $x = e^t$ )
2.  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$  ( $t = \sin x$ )
3.  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$  ( $x = \frac{t\sqrt{3}-1}{2}$ )
4.  $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$  ( $x = t^2 - 1$ )
5.  $\int_0^{1/2} \frac{3}{1+4t^2} dt$  ( $x = 2t$ )
6.  $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} dt$  ( $x = 2t$ )
7.  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  ( $t = \sin x$ )
8.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin 4x}{\sin x} dx$  ( $t = \sin x$ )
9.  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$  ( $t = \tan x$ )
10.  $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt$  ( $x = e^t$ )
11.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$  ( $x = \cosh t = \frac{1}{2} (e^{2t} + e^{-2t})$ )
12.  $\int_{3/2}^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$  ( $t = 2x - 3$ )
13.  $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{-x}} dx$  ( $t = e^x$ )
14.  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$  ( $t = \arctan x$ )
15.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx$  ( $t = 3 - 2x$ )

Pour le 8. utiliser (après l'avoir montré) :  $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$

**Exercice 8** Calculer les intégrales des fractions rationnelles suivantes :

1.  $\int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$
2.  $\int_{-2}^{-1} \frac{t-2}{t(t-1)} dt$
3.  $\int_{-1}^0 \frac{t+1}{t^2+t-2} dt$
4.  $\int_{-4}^{-2} \frac{t+1}{t^2+4t+8} dt$
5.  $\int_2^{e+1} \frac{t+1}{t-1} dt$
6.  $\int_3^4 \frac{t^3+1}{t(t-2)} dt$
7.  $\int_1^2 \frac{t^3+2t^2+4t+2}{t^2+t} dt$
8.  $\int_{1/3}^{2/3} \frac{7t^2-2t-1}{t+2t^2-3t^3} dt$
9.  $\int_{1/2}^{4/3} \frac{6t^2+31t+12}{6t^2+19t-7} dt$

**Exercice 9** Calculer les intégrales des fractions rationnelles suivantes :

1.  $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-4} dx$
2.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
3.  $\int_{-2}^0 \frac{5}{x^2+4x+8} dx$
4.  $\int_0^2 \frac{x^2+x-1}{x^2-2x-3} dx$
5.  $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2+4x+5} dx$
6.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
7.  $\int_3^4 \frac{x^4+x+1}{x^3-3x^2+2x} dx$

**Exercice 10** Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$  non nul :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

En déduire  $\int_1^2 \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$

**Exercice 11** Déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout réel  $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

En déduire  $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{x^4}{x^4-1} dx$

**Exercice 12** Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  :

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$$

En déduire  $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx$

**Exercice 13** A l'aide du changement de variable  $t = e^x$  puis d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^1 e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$$

**Exercice 14**

1. Calculer  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2. Montrer que  $\forall x \in [1; +\infty[ : \frac{1}{2x} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x}$

3. En déduire un encadrement de l'intégrale  $J = \int_1^e \frac{x \ln x}{1+x^2} dx$

**Exercice 15** On pose  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx$  et  $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2 \sin x} dx$

1. Calculer  $I$  et  $I + J$

2. En déduire  $J$