

8 Exercices

8.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire - Espérance - Ecart-type

Exercice 1 Un dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face k est double de la probabilité d'obtenir la face $k - 1$ pour tout k entier compris entre 2 et 6.

On note X la variable aléatoire qui, à l'issue d'un lancer de dé associe la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
Que représente $E(X)$?
3. Calculer l'écart-type $\sigma(X)$ de X .
4. Tracer le diagramme en bâtons de la loi de X puis la représentation graphique de la fonction de répartition de X .

Exercice 2 Un jeu de 52 cartes est incomplet. Il ne reste que 12 cartes à trèfle, 6 à carreau, 10 à coeur et 8 à pique. On note X la variable aléatoire qui, à toute carte tirée au hasard, associe 1 si la couleur est trèfle, 5 si c'est carreau, 10 si c'est coeur et 20 si c'est pique.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . Que représente $E(X)$?
3. Calculer l'écart-type $\sigma(X)$ de X .
4. Tracer le diagramme en bâtons de la loi de X puis la représentation graphique de la fonction de répartition de X .

Exercice 3 Une entreprise commercialise sept variétés d'un même article.

Le profit pour chaque variété est le suivant :

- Variétés 1 et 6 : 4 €
- Variétés 2, 4 et 5 : 8 €
- Variété 3 : 9 €
- Variété 7 : 10 €

On suppose qu'il y a équiprobabilité de la demande d'une variété quelconque de cet article.

Soit X la variable aléatoire qui associe, à tout article choisi au hasard, le profit.

1. Déterminer l'univers des possibles Ω puis $X(\Omega)$.
2. Déterminer les événements $(X = 4)$; $(X = 8)$; $(X = 9)$ et $(X = 10)$.
3. Déterminer la loi de X .

Exercice 4 Dans une entreprise, on note X la variable aléatoire qui, à une semaine choisie au hasard associe le nombre d'employés absents. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_k)$	0,05	0,09	0,15	0,34	0,21	0,12	0,03	0,01

1. Représenter la loi de X sous forme de diagramme en bâtons et sous forme d'histogramme.
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
3. Calculer l'espérance mathématique m de X .
Que représente m ?
4. Déterminer l'écart-type σ de X .
5. Calculer $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$; $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$; $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma)$

8.2 Loi binômiale

Exercice 5 On suppose que la variable aléatoire X suit la loi binômiale $\mathcal{B}\left(50; \frac{1}{10}\right)$

1. Calculer $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$; $P(X = 10)$; $P(X \leq 1)$; $P(X \geq 4)$.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 6 On suppose que la variable aléatoire X suit la loi binômiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{100}\right)$

1. Déterminer n pour que $P(X = 0) \leq 0,02$
2. Déterminer n pour que $P(X \geq 1) \leq 0,90$

Exercice 7 Une machine produit des pièces dont 5 % sont défectueuses. Soit X la variable aléatoire associant à chaque échantillon de 30 pièces le nombre de pièces défectueuses de cet échantillon (l'échantillon est constitué à l'aide d'un tirage assimilé à un tirage avec remise).

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité que l'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse.
3. Calculer la probabilité que toutes les pièces de l'échantillon soient défectueuses.
4. Calculer la probabilité que l'échantillon comporte au plus deux pièces défectueuses.

Exercice 8 Soit X la variable aléatoire associant, à une pièce choisie au hasard dans la production, son poids. On suppose que X est une variable aléatoire discrète de loi :

Poids	320	330	340	350	360	370	380
Probabilité	0,06	0,12	0,20	0,25	0,17	0,14	0,06

1. Calculer à 10^{-2} près l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .
2. On prélève au hasard et avec remise 10 pièces dans la production. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement ainsi effectué, associe le nombre de pièces de 320 g.
 - (a) Déterminer la loi de Y ainsi que les caractéristiques $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
 - (b) Calculer la probabilité qu'au moins une pièce ait un poids de 320 g.
 - (c) Quelle est la valeur minimale du nombre de pièces à prélever dans la production pour que la probabilité d'obtenir au moins une pièce de 320 g soit supérieure à 0,90.

8.3 Loi de Poisson

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Calculer $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X < 3)$

Exercice 10 Reprendre l'exercice précédent dans le cas où $\lambda = 2,5$.

Exercice 11 Idem avec cette fois $\lambda = 0,5$.

Exercice 12 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 8. Déterminer la plus petite valeur de k vérifiant $P(X \leq k) \geq 0,90$

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer λ sachant que $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Exercice 14 Un livre de 300 pages comporte en moyenne 150 "coquilles". La variable aléatoire qui, à une page choisie au hasard, associe le nombre de "coquilles" de cette page, suit une loi de Poisson.

1. Déterminer le paramètre de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'une page choisie au hasard ne comporte aucune "coquille".

Exercice 15 Une usine produit des articles dont 2% présentent des défauts. On prélève (à l'aide d'un tirage aléatoire avec remise) un échantillon de 150 articles. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi constitué, associe le nombre d'articles défectueux de cet échantillon.

1. Déterminer la loi de X .
2. Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
3. Utiliser cette approximation pour calculer (à 10^{-3} près) la probabilité que l'échantillon contienne
 - (a) au moins un article défectueux.
 - (b) au plus 3 articles défectueux.
4. Mêmes questions avec un échantillon de 120 articles.

Exercice 16 Sur une machine, deux causes de pannes indépendantes l'une de l'autre sont possibles. Celles dues à une erreur de la personne s'en occupant et celles dues à la machine elle-même. Soit X la variable aléatoire qui, à une année choisie au hasard, associe le nombre de pannes dues à une mauvaise utilisation de la machine. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1, 5)$. Soit Y la variable aléatoire qui, à une année choisie au hasard, associe le nombre de pannes dues à la machine elle-même. On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(0, 5)$.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne pendant un an
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 pannes pendant un an
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une panne pendant un an.
4. Calculer $E(X + Y)$. Interpréter ce résultat.

8.4 Loi normale

Exercice 17 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(25, 8)$.

Calculer : $P(X \leq 27)$; $P(X \geq 26)$; $P(X \geq 24)$; $P(X \leq 23)$; $P(22 \leq X \leq 28)$; $P(21 < X < 26)$

Exercice 18 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(25, 8)$. Déterminer le nombre réel α tel que :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|---|
| 1. $P(X \leq \alpha) = 0,95$ | 3. $P(X \geq \alpha) = 0,90$ | 5. $P(25 - \alpha \leq X < 25 + \alpha) = 0,95$ |
| 2. $P(X \leq \alpha) = 0,05$ | 4. $P(X \geq \alpha) = 0,10$ | |

Exercice 19 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; 0, 1)$. Calculer m pour que :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $P(X \geq 12, 4) = 0,10$ | 2. $P(X \geq 12, 4) = 0,90$ |
|-----------------------------|-----------------------------|

Exercice 20 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10; \sigma)$. Calculer σ pour que :

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| 1. $P(X \leq 10, 4) = 0,95$ | 2. $P(9, 6 \leq X \leq 10, 4) = 0,95$ |
|-----------------------------|---------------------------------------|

Exercice 21 Une entreprise fabrique des boulons. La variable aléatoire X qui, à un boulon choisi au hasard, associe son diamètre suit une loi de Laplace-Gauss de moyenne 6 mm et d'écart-type 0,1 mm. On considère qu'un boulon est défectueux si son diamètre est inférieur à 5,80 mm ou supérieur à 6,25 mm. Calculer la probabilité qu'un boulon soit défectueux.

Exercice 22 Lors du prélèvement de pièces fabriquées par une machine, on constate que 10% des pièces ont un diamètre supérieur à 155,3 mm et 20% des pièces ont un diamètre inférieur à 154,2 mm. On suppose que la variable aléatoire X qui, à une pièce choisie au hasard, associe son diamètre, suit une loi normale. Calculer la probabilité qu'une pièce fabriquée ait un diamètre compris entre 154 et 155 mm.

Exercice 23 Une usine fabrique des pièces cylindriques. La variable aléatoire D qui, à une pièce choisie au hasard, associe son diamètre, suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ (m et σ dépendent du réglage de la machine).

1. La machine est réglée de sorte que $m = 15$ mm et $\sigma = 0,35$ mm. Le contrôle de la fabrication ne retient que les pièces dont le diamètre est compris entre 14,3 mm et 15,5 mm. Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production soit conforme au contrôle ?

2. La machine est réglée de sorte que $\sigma = 0,35$ mm. Déterminer x pour que le diamètre de 95% de la production appartienne à l'intervalle $[m - x; m + x]$.
3. La machine est réglée de sorte que $m = 14,9$ mm. Quel devrait être l'écart-type pour que 90% des pièces soient conformes au contrôle tel qu'il a été défini dans la question 1 ?

Exercice 24 Une entreprise produit des batteries de téléphone portable. Au cours de la production peuvent apparaître deux défauts indépendants que l'on appellera défaut A et défaut B

1. On prélève une batterie au hasard dans la production d'une journée. La probabilité que le défaut A apparaisse vaut 0,02 et la probabilité que le défaut B apparaisse vaut 0,01.
Calculer la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse, c'est à dire qu'elle comporte au moins un des deux défauts.
2. On prélève au hasard dans la production un échantillon de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 100 associe le nombre de batteries défectueuses.
 - (a) Quelle est la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X ?
Donner son espérance mathématique et sa variance.
 - (b) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que l'échantillon comporte plus de deux batteries défectueuses.
3. On s'intéresse dans cette question à la durée de décharge des batteries. On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 batteries associe la moyenne des durées de décharge. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 0,4$.
 - (a) Calculer la probabilité : $P(79 \leq Y \leq 81)$.
 - (b) Déterminer le réel a tel que $P(Y \geq a) = 0,95$. On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a .
 - (c) Calculer la probabilité de l'événement « $(Y \geq 80)$ sachant que $(Y \geq 79,34)$ ».

Exercice 25 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(20; 3)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(16; 4)$. On suppose X et Y indépendantes et on pose $Z = X + Y$

1. Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$
2. Calculer $P(34 < Z \leq 40)$
3. Déterminer le réel α tel que $P(36 - \alpha \leq Z \leq 36 + \alpha) = 0,95$

Exercice 26 Une machine fabrique des pièces cylindriques utilisées dans le secteur des travaux publics. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire qui, à une pièce choisie au hasard, associe sa longueur en cm (resp. son rayon en cm). On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30; 0,8)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(4; 0,1)$. On suppose également que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $P(X \leq 31,2)$ puis $P(Y \geq 4,2)$
2. Une pièce est utilisable si sa longueur est comprise entre 28,8 et 31,2 cm et si son rayon est compris entre 3,8 et 4,2 cm. Calculer la probabilité qu'une pièce soit utilisable.

Exercice 27 Une usine fabrique des pièces d'acier dont 5% sont trop longues ou trop courtes donc non conformes au cahier des charges. On prélève à l'aide d'un tirage aléatoire non exhaustif un échantillon de n pièces. Soit X la variable aléatoire associant, à cet échantillon, le nombre de pièces non conformes.

1. Déterminer la loi de X .
2. On suppose $n = 5$.
 - (a) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes.
 - (b) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il y ait au plus une pièce non conforme.
3. On suppose $n = 40$.

- (a) Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
- (b) Utiliser cette approximation pour calculer :
- la probabilité qu'il y ait exactement cinq pièces non conformes.
 - Calculer la probabilité qu'il y ait au plus trois pièces non conformes.
4. On suppose $n = 800$
On admet que la loi de X peut être approchée par une loi normale.
- (a) Donner les paramètres de cette loi.
- (b) Calculer la probabilité que le nombre de pièces non conformes soit supérieur à 47 puis que le nombre de pièces non conformes soit strictement compris entre 45 et 50.
Indication : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$; $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma)$ et $\mathcal{B}(n; p) \simeq \mathcal{N}(m; \sigma)$ alors :
- $$P(X = k) \simeq P\left(k - \frac{1}{2} \leq Y \leq k + \frac{1}{2}\right) \text{ et donc :}$$
- $$P(X > 47) \simeq P(Y \geq 47,5) \text{ et } P(45 < X < 50) \simeq P(45,5 \leq Y \leq 49,5)$$

Exercice 28 Une usine fabrique des pièces pouvant présenter un défaut A (ce qui arrive dans 2 % des cas) et un défaut B (ce qui arrive dans 10 % des cas).

On prélève une pièce au hasard dans la production.

On désigne par E_1 l'événement "la pièce présente le défaut A " et par E_2 l'événement "la pièce présente le défaut B ".

On admet que les événements E_1 et E_2 sont indépendants.

- Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard :
 - présente les deux défauts ;
 - présente au moins un défaut.
- On prélève au hasard un échantillon de 400 pièces.
La production est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 400 pièces à des tirages indépendants.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 400 pièces associe le nombre de pièces de cet échantillon présentant le défaut B
 - Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
 - Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X
 - On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale de paramètres m et σ .
Vérifier que $m = 40$ et $\sigma = 6$.
 - On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(40; 6)$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que, dans un tel échantillon de 400 pièces, le nombre de pièces présentant le défaut B soit inférieur ou égal à 46, c'est à dire $P(Y \leq 46,5)$.