4 Exercices

Exercice 1 Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2a-1 & b+2 \\ 3c-2 & d+5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels a, b, c pour que $A = B$

Exercice 2 Ecrire de manière explicite la matrice carrée d'ordre 3 A de terme général $a_{ij} = i + j$

Exercice 3 Ecrire de manière explicite la matrice de type $(2, 3)$ B de terme général $bij = 3i - 2j$

Exercice 4 Ecrire de manière explicite la matrice carrée d'ordre 3 A de terme général $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Exercice 5 Ecrire de manière explicite la matrice carrée d'ordre 3 A de terme général $a_{ij} = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Exercice 6 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} ;\ Y = \begin{pmatrix} 9 & 5 \end{pmatrix} ;\ M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits $X \times A$; $Y \times A$; $A \times B$; $A \times C$; $A \times M$ et $M \times A$.

Exercice 7 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} .\ C = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times B, A \times C, B \times C, B \times A, C \times A, C \times B$.
2. Calculer $A \times (B + C)$ et $A \times B + A \times C$.
3. Calculer $(A + B) \times C$ et $A \times C + B \times C$.
4. Calculer $A^2 = A \times A,\ B^2 = B \times B$ et $C^2 = C \times C$
5. Calculer $(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B)$ puis $A^2 + 2.A \times B + B^2$.

Exercice 8 On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. Déterminer les réels a et b tels que $M^2 = aM + bI$.
3. Exprimer M^3 en fonction de M et de I puis écrire M^3 sous forme de matrice. Comparer avec le résultat obtenu à la première question.
4. (a) Déduire de l'égalité trouvée à la deuxième question que l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2} M \times (3I - M)$$

   (b) En déduire une matrice P telle que $M \times P = I$

   (c) Ecrire P sous forme de matrice.

   (d) Calculer $P \times M$.

Exercice 9 Une usine fabrique trois sortes d'articles $a_1,\ a_2,\ a_3$ à partir de trois modules $m_1,\ m_2,\ m_3$.
On donne :

articles

a_1	a_2	a_3	
3	9	5	m_1
4	0	9	m_2
4	8	6	m_3

modules

modules

m_1	m_2	m_3	
5	6	3	Poids unitaire (kg)
180	250	150	Coûts unitaires (en euros)

On lit par exemple :
Pour fabriquer un article a_2 il faut 9 modules m_1 et 8 modules m_3.
Un module m_1 pèse 5 kg et coûte 180 euros.

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer le produit matriciel $M \times A$.
   (b) Interpréter les lignes de ce produit.
2. Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3.
   Elle dispose en début de semaine d'un stock de 200 modules de chaque sorte.
   On note F la matrice $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer le produit matriciel $A \times F$. Que représente-t-il ?
   (b) La demande (8 articles a_1, 12 articles a_2 et 13 articles a_3) peut-elle être satisfaite ?

Exercice 10 Soit le système $\begin{cases} 4x - y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x - 3y + 5z = 3 \end{cases}$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A telle que $A \times X = B$.
2. Calculer $A^3 - 10.A^2 + 23.A - 4I$
3. En déduire une matrice A' telle que $A \times A' = A' \times A = I$
4. En déduire la solution du système proposé.

Exercice 11 Soit le système $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - 3z = 8 \\ x - 3y + 5z = 6 \end{cases}$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A telle que $A \times X = B$.
2. Calculer $A^3 - 9.A^2 + 17.A - 7I$
3. En déduire une matrice A' telle que $A \times A' = A' \times A = I$
4. En déduire la solution du système proposé.