4 Exercices

Exercice 1 On veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en mm, des pieds de boulons constituant un stock très important ; on se propose de construire un test d'hypothèse.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque boulon tiré au hasard dans le stock, associe le diamètre, en mm, de son pied.
La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0,1$.
On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 boulons prélevé dans un stock, associe la moyenne des diamètres des pieds de ces boulons (le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 10$. Dans ce cas les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 10$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Justifier que, sous l'hypothèse H_0, $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,01.
2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que
$$P\left(10 - h \leqslant \bar{X} \leqslant 10 + h\right) = 0,95$$
3. Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 boulons et on observe que, pour cet échantillon, le moyenne des diamètres des pieds est $\bar{x} = 10,03$.
Peut-on, au risque de 5 %, conclure que les boulons du stock sont conformes pour les diamètres de leur pied.

Exercice 2 Une usine fabrique des billes. Un client réceptionne une commande. Il prélève un échantilllon de 125 billes choisies au hasard et avec remise dans le lot reçu et constate que le diamètre moyen est égal à 25,1.
Pour les billes fabriquées par l'entreprise, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs leurs diamètres, suit une loi normale d'écart type 0,44.
L'entreprise s'est engagée à ce que la moyenne des diamètres des billes fournies soit de 25.
Le client décide de construire un test bilatéral permettant de vérifier l'hypothèse selon laquelle le diamètre des billes du lot reçu est de 25.

1. Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 125 billes prises au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres obtenus.
   (a) Donner sous l'hypothèse nulle la loi de $\bar{X}$. En préciser les paramètres.
   (b) Déterminer le nombre α tel que $P\left(25 - \alpha \leqslant \bar{X} \leqslant 25 + \alpha\right) = 0,95$.
   (c) Enoncer la règle de décision du test
3. Au vu de l'échantillon, au risque de 5 %, que peut conclure le client sur le respect de l'engagement de l'entreprise ?

Exercice 3 Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25 mm.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque disque de la production, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon, il est considéré comme défectueux.

1. On suppose que $\sigma = 0,04$. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivants :
   (a) $m = 25$
   (b) $m = 24,99$

2. On note $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 disques dans la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type 0,004.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque de 5 %, que la moyenne m des diamètres des disques de la production est égale à 25.
   (a) Sous l'hypothèse nulle H_0 $(m = 25)$, calculer la valeur du réel d tel que
   $$P\left(\left|\bar{X} - 25\right| < d\right) = 0,95$$
   (b) La moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994. Quelle est la conclusion du test ?

Exercice 4 Un grossiste en fournitures de bureau revend un ruban adhésif transparent répondant à deux critères :

– C1 : pouvoir être repositionné au moins une fois sans arracher le support
– C2 : ne pas jaunir le papier sur lequel il est posé.

Après leur utilisation, un client s'aperçoit que 6 rubans adhésifs sur 500 jaunissent le papier. Il décide donc de demander au grossiste de vérifier si le lot est compatible avec son affirmation d'avoir dans son stock 0,8 % des rubans ne satisfaisant pas au critère C2.

1. Quelle est l'hypothèse H_0 ? Quelle est l'hypothèse H_1 ?
2. On désigne par F la variable aléatoire qui, à tout lot de 500 rubans adhésifs prélevés au hasard et avec remise, associe la fréquence de rubans qui jaunissent le papier.
On suppose, sous l'hypothèse nulle, que F suit la loi normale de moyenne $0,008$ et d'écart type $\sqrt{\dfrac{0,008\,(1-0,008)}{500}}$
   (a) Déterminer le nombre a tel que $P\,(F < 0,008 + a) = 0,95$
   (b) Enoncer la règle de décision du test.
3. Au risque de 5 %, et suite à la requête de son client sur l'échantillon des 500 rubans qu'il a acheté, le grossiste doit-il remettre en cause son affirmation ?

Exercice 5 Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.
On appelle p la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.
Si le magicien est un imposteur on a $p = \dfrac{1}{2}$ sinon $p > \dfrac{1}{2}$
On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.
On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence des succès obtenus par le magicien au cours des n tirages d'une carte. On admet que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}$
On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si le magicien est un imposteur.
On choisit $n = 100$.
On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$ et comme hypothèse alternative $H_1 : p > \dfrac{1}{2}$

1. Calculer, sous H_0, le réel positif h tel que $P\left(F \leqslant \dfrac{1}{2} + h\right) = 0,95$
2. Enoncer la règle de décision du test.
3. Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5 %, que le magicien est un imposteur ?

Exercice 6 Une entreprise fabrique des pots de peinture. Elle les fait livrer habituellement par lots de 20 pots ou de 100 pots. On se propose d'étudier les variations de la quantité d'un certain produit A contenu dans chaque pot.
On a contrôlé le dosage du produit A à la sortie de deux chaînes de fabrication.
Deux échantillons de 100 pots ont été analysés ; l'un provient de la chaîne n° 1, l'autre de la chaîne n° 2.
Le tableau suivant donne la répartition de l'échantillon de la chaîne n° 1 en fonction de la masse de produit A exprimée en grammes.

m (en g)	$[100;102[$	$[102;104[$	$[104;106[$	$[106;108[$
Effectifs	1	3	25	32
m (en g)	$[108;110[$	$[110;112[$	$[112;114[$	$[114;116[$
Effectifs	27	6	4	2

On donne des valeurs approchées de la moyenne m_2 et de l'écart type σ_2 de l'échantillon fabriqué par la chaîne n° 2 : $m_2 = 107$ et $\sigma_2 = 2$ (en grammes).
Dans les questions 1 et 2 les valeurs seront arrondies au dixième le plus proche.

1. En prenant les centres des classes, calculer une approximation de la moyenne m_1 et de l'écart type σ_1 de l'échantillon issu de la chaîne n° 1.
2. En considérant les résultats obtenus dans la première question, donner les estimations ponctuelles :
   (a) des quantités moyennes μ_1 et μ_2 de produit A pour les productions de ces deux chaînes.
   (b) des écarts types s_1 et s_2 correspondants.
3. On se propose de savoir si la différence des moyennes observées dans les deux échantillons est due à des fluctuations d'échantillonnage ou si la chaîne de fabrication n° 1 produit des pots contenant davantage de produit A que la chaîne n° 2.
   On note $\bar{X}_1$ la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire de 100 pots provenant de la chaîne n° 1 associe la quantité moyenne de produit A dans cet échantillon.
   On note $\bar{X}_2$ la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire de 100 pots provenant de la chaîne n° 2 associe la quantité moyenne de produit A dans cet échantillon.
   On admettra que :
   - $\bar{X}_1$ suit une loi normale de paramètres μ_1 et $\dfrac{s_1}{10}$
   - $\bar{X}_2$ suit une loi normale de paramètres μ_2 et $\dfrac{s_2}{10}$
   - $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont des variables aléatoires indépendantes
   - $D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ suit une loi normale.

   On choisit l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

   (a) Calculer la variance de la variable aléatoire D. On appelle $\sigma(D)$ son écart type. Vérifier que $\sigma(D) \simeq 0,32$.
   (b) Calculer au centième le plus proche le réel a tel que $P(D < a) = 0,99$.
   (c) L'hypothèse nulle H_0 est-elle acceptée ou rejetée (au seuil de 1 %) ?

Exercice 7

Partie A
Soit T une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.
Sa fonction de répartition est notée Π.
Soit $t_{\alpha/2}$ un nombre strictement positif. Montrer que

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leqslant T \leqslant t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Pi\left(t_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Déterminer $t_{\alpha/2}$ pour $\alpha = 0,05$ et $\alpha = 0,02$.
Dans un laboratoire de contrôle, on mesure la masse de l'extrait sec d'une résine acrylique.

Partie B.

Dans cette partie, la mesure est faite à 105° C.

On admet qu'une mesure à 105° C est la réalisation d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres m_1 et σ_1. On réalise 50 mesures qui constituent un échantillon non exhaustif de taille 50 extrait de la population de mesures à 105° C.

1. On a obtenu (en grammes) sur cet échantillon une moyenne $\bar{x}_1 = 14,62$ et un écart type $s_1 = 0,62$. Déterminer à partir de ces résultats une estimation ponctuelle $\hat{m}_1$ et $\hat{s}_1$ de la moyenne m_1 et de l'écart type σ_1 de la variable aléatoire X.
2. On admet que la variable aléatoire $\bar{X}$ qui à tout échantillon de 50 mesures associe la moyenne de ces mesures à 105° C suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_1; \frac{\sigma_1}{\sqrt{50}}\right)$ de paramètres m_1 et $\frac{\sigma_1}{\sqrt{50}}$
   En remplaçant l'écart type inconnu σ_1 par son estimation ponctuelle $\hat{s}_1$, déterminer un intervalle de confiance, au seuil de 5 %, centré en $\bar{x}_1$ de la moyenne inconnue m_1 de la population de mesures à 105° C.

Partie C

Le laboratoire de contrôle décide de refaire 50 mesures de l'extrait sec, mais cette fois à 145° C.

On admet, comme dans la partie B, qu'une mesure à 145° C est la réalisation d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètres m_2 et σ_2. Sur ce nouvel échantillon, on a trouvé (en grammes) une moyenne $\bar{y}_2 = 13,56$ et un écart type $s_2 = 0,55$

1. Déterminer à partir de ces résultats une estimation ponctuelle $\hat{m}_2$ et $\hat{s}_2$ de la moyenne m_2 et de l'écart type σ_2 de la variable aléatoire Y.
2. On admet que la variable aléatoire $\bar{Y}$ qui à tout échantillon de 50 mesures associe la moyenne de ces mesures à 145° C suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_2; \frac{\sigma_2}{\sqrt{50}}\right)$ de paramètres m_2 et $\frac{\sigma_2}{\sqrt{50}}$
   On admet aussi que les variables aléatoires $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ sont indépendantes et que la différence $D = \bar{X} - \bar{Y}$ suit une loi normale d'espérance mathématique $E(D)$ et d'écart type $\sigma(D)$ avec
   $$E(D) = m_1 - m_2 \text{ et } \sigma(D) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{50}}$$
   On se propose de comparer les deux moyennes des mesures de l'extrait sec à 105° C et à 145° C à l'aide d'un test bilatéral de comparaison des moyennes.
   (a) Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1.
   (b) En utilisant la partie A et en prenant $\sqrt{\frac{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2}{50}}$ pour estimation de $\sigma(D)$, déterminer les deux valeurs critiques, bornes de l'intervalle qui permet de décider si les deux moyennes de la mesure de l'extrait sec sont égales à 2 %
   (c) Enoncer la règle de décision du test.
   (d) Mettre en oeuvre ce test à partir des résultats obtenus sur les deux échantillons.
   Que conclure ?