Fonction réciproque

1 Dérivation

1.1 Rappels

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si il existe un nombre réel A et une fonction ε tels que :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + Ah + h.\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

A s'appelle nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$

Théorème 1 f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si $\boxed{\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$

Interprétation géométrique :
Si $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $\boxed{y - f(a) = f'(a).(x-a)}$

Remarque 1 Si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), f n'est pas dérivable en a mais $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe $\left(O; \vec{j}\right)$.
Dire que f est dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f admet en tout point de I une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition 2 On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$

Remarque 2 On note aussi $\dfrac{df}{dx}$ la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)$

Théorème 2 *Dérivées des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha - 1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Théorème 3 Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors : $u+v$, λu et $u.v$ sont dérivables sur I et :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \quad \boxed{(\lambda u)' = \lambda u'} \quad \boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Si de plus u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$

Si u et v sont dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}}$

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

Théorème 4 Si u est une fonction dérivable sur I et si f est une fonction dérivable sur $u(I)$, alors $f \circ u$ est dérivable sur I et $\boxed{(f \circ u)' = (f' \circ u).u'}$

Définition 3 Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si la fonction dérivée f' est à son tour dérivable sur I, on appelle dérivée seconde de f et on note f'' la fonction dérivée de f'.

Théorème 5 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I.

1. Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I
2. Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

1.2 Compléments

Définition 4 Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont les fonctions notées respectivement sh et ch qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Théorème 6 Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ et $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

2 Fonction réciproque

Théorème 7 (des valeurs intermédiaires) Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarque 3 Ce théorème ne précise pas le nombre de solutions de l'équation.

Théorème 8 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si pour tout x appartenant à $[a; b]$ on a $f'(x) > 0$ alors, f est strictement croissante sur $[a; b]$ et, pour tout λ appartenant à $[f(a); f(b)]$ l'équation $f(x) = \lambda$ possède une et une seule solution $\alpha \in [a; b]$.
On peut alors définir la fonction réciproque de f, notée f^{-1}, définie sur $[f(a); f(b)]$ par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in [f(a); f(b)] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) \\ y \in [a; b] \end{array}\right.}$$

Théorème 9 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. Si pour tout x appartenant à $[a; b]$ on a $f'(x) < 0$ alors, f est strictement décroissante sur $[a; b]$ et, pour tout λ appartenant à $[f(b); f(a)]$ l'équation $f(x) = \lambda$ possède une et une seule solution $\alpha \in [a; b]$.
On peut alors définir la fonction réciproque de f, notée f^{-1}, définie sur $[f(b); f(a)]$ par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in [f(b); f(a)] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) \\ y \in [a; b] \end{array}\right.}$$

Remarque 4 Les théorèmes 8 et 9 restent valables si on remplace $[a; b]$ par $]a; b[$ à condition de remplacer alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x \to b} f(x)$. On peut alors remplacer a par $-\infty$ et b par $+\infty$.

Théorème 10 **Dans un repère orthonormal,** les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$

Eiffel - Gagny

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

2.1 Deux exemples connus

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$.
f est dérivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $f\,(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x)=+\infty$
f admet donc une fonction réciproque définie sur $[0;+\infty[$ qu'on appelle racine carrée définie par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ x\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y^2 \\ y\geq 0\end{array}\right.}$$

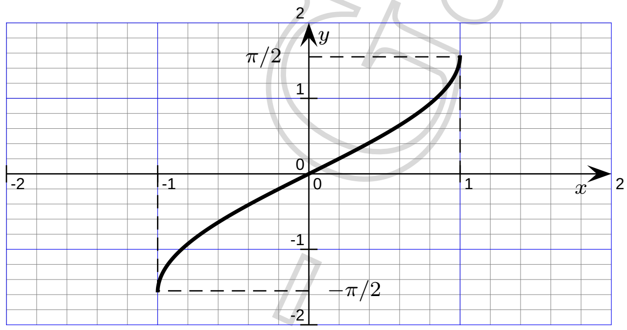
Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.
f est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x)=+\infty$
f admet donc une fonction réciproque définie sur $]-\infty;+\infty[$ qu'on appelle exponentielle définie par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=e^x \\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\ln y \\ y\in\,]0;+\infty[\end{array}\right.}$$

2.2 Trois classiques

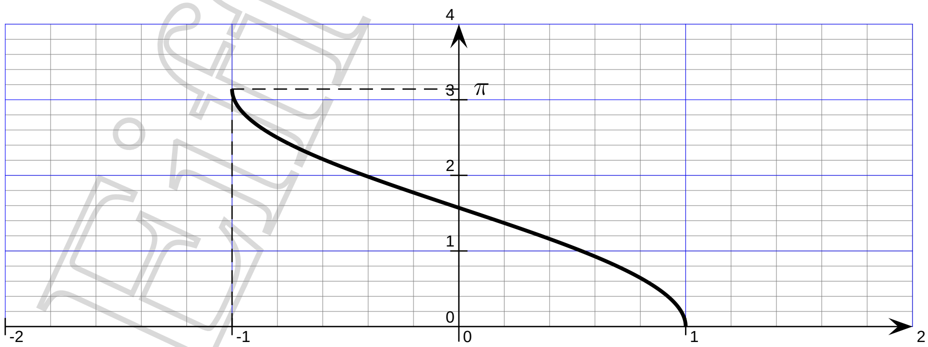
Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$.
f est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $f\,(-\pi/2)=-1$ et $f\,(\pi/2)=1$
f admet donc une fonction réciproque définie sur $[-1;1]$ qu'on appelle arcsinus définie par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=\arcsin x \\ -1\leq x\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\right.}$$



Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\cos x$.
f est dérivable et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ et $f\,(0)=1$ et $f\,(\pi)=-1$
f admet donc une fonction réciproque définie sur $[-1;1]$ qu'on appelle arccosinus définie par

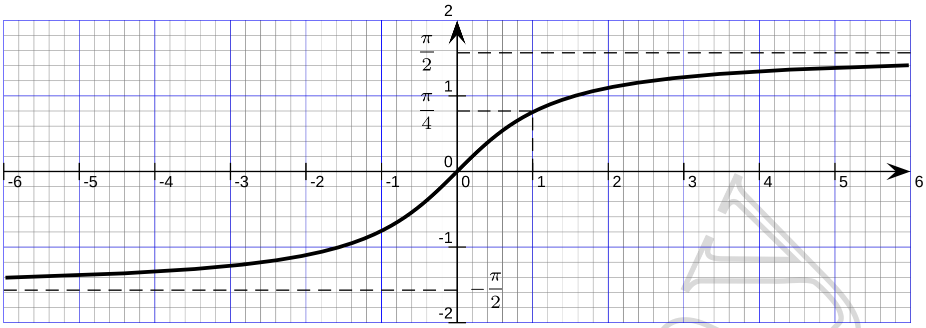
$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=\arccos x \\ -1\leq x\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cos y \\ 0\leq y\leq\pi\end{array}\right.}$$



Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan x$.
f est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} f(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
f admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle arctangente définie par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=\arctan x \\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\tan y \\ -\pi/2<y<\pi/2\end{array}\right.}$$



2.3 Dérivation des fonctions circulaires réciproques

Théorème 11 Nous admettrons les résultats suivants :
la fonction $x\mapsto\arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ et

$$\boxed{\forall x\in\,]-1;1[\,:(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

la fonction $x\mapsto\arccos x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ et

$$\boxed{\forall x\in\,]-1;1[\,:(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

la fonction $x\mapsto\arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}:(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}}$$

Eiffel - Gagny

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff