

Intégration

1 Définition de l'intégrale

Définition 1 F est une primitive de f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Théorème 1 Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Théorème 2 Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I , il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I : F(x) = G(x) + C$$

Définition 2 Soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ et soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

L'intégrale de f sur $[a; b]$ est le réel noté $\int_a^b f(x) dx$ défini par

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque 1 x est une variable "muette". $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$

Théorème 3 Soit f dérivable sur l'intervalle I et soit $a \in I$. Alors, pour tout x de I :

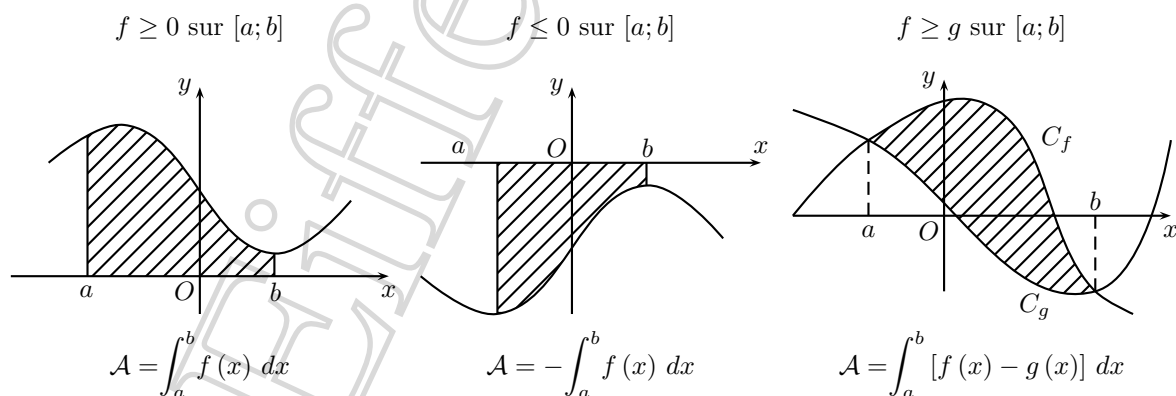
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(a) = 0 \end{cases}$$

Remarque 2 F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

2 Interprétation géométrique

On suppose f et g dérivables sur $[a; b]$

A représente l'aire de la partie hachurée, en unités d'aire :



3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 4 (relation de Chasles) Soit f dérivable sur un intervalle I et soient a, b et c des éléments de I .

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Théorème 5 Si f et g sont dérivables sur $[a; b]$:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Théorème 6 Si f est dérivable sur $[a; b]$ et si λ est un nombre réel :

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Théorème 7 Si f est dérivable et positive sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Théorème 8 Si f et g sont dérivables sur $[a; b]$ et si $f \leq g$ sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Corollaire 1 (Inégalité de la moyenne)

Si f est dérivable sur $[a; b]$ et si $\forall x \in [a; b] : m \leq f(x) \leq M$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Corollaire 2 Si f est dérivable sur $[a; b]$: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Corollaire 3 Soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq k$ alors

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq k(b-a)$$

Corollaire 4 (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b] : |f'(x)| \leq k$ alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$$

Définition 3 Si f est dérivable sur $[a; b]$ on appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

4 Calculs d'intégrales

4.1 Intégration immédiate

u désigne une fonction dérivable sur I et F une primitive de f sur I .

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$u^r \cdot u'$ ($r \neq -1$)	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$u' \cdot e^u$	e^u	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

4.2 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ telles que u' et v' soient dérivables sur $[a; b]$.

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v \Rightarrow \int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$$

$$\boxed{\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx}$$

4.3 Intégration par changement de variable

Soit f dérivable sur $[a; b]$ et Soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

Soit φ dérivable sur $[\alpha; \beta]$ à valeurs dans $[a; b]$ et telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} [F \circ \varphi]'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad \text{avec } a = \varphi(\alpha) \text{ et } b = \varphi(\beta)}$$

4.4 Intégration d'une fraction rationnelle

1. Le degré du numérateur est-t-il strictement inférieur à celui du dénominateur ?
Si non, effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
On est ramené alors à la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle du type voulu.
2. La fraction s'intègre-t-elle immédiatement ?
C'est le cas de $\frac{1}{x^2+1}$ ou $\frac{u'}{u}$ ou $\frac{u'}{u^r} = u' \cdot u^{-r}$ si $r \neq 1$
3. Si $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ écrire $f(x) = \frac{a}{2} \frac{2x}{x^2+1} + b \frac{1}{x^2+1}$ puis intégration immédiate.
4. Si $f(x) = \frac{mx+p}{ax^2+bx+c}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: poser $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$
Si $\Delta > 0$, factoriser le dénominateur et voir 5.
5. Si $f(x) = \frac{N(x)}{(x-a)Q(x)}$ avec $\deg N < 1 + \deg Q$ et $Q(a) \neq 0$ alors

$$\boxed{\frac{N(x)}{(x-a)Q(x)} = \frac{\lambda}{x-a} + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \deg R < \deg Q}$$