Calcul matriciel

1 Définitions

Une matrice est un tableau de nombres.
Si ce tableau comporte n lignes et p colonnes, on dit que la matrice est de type (n, p).
Dans le cas où il y n lignes et n colonnes, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.

Exemple 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(2, 3)$.

Exemple 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée.

La matrice carrée d'ordre n ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs est la matrice identité et se note I_n ou tout simplement I.

Exemple 3 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de type (n, p) comportant que des 0 est la matrice nulle et se note $0_{n,p}$. Dans le cas où $n = p$ on note $0_{n,p} = 0_n$. Quand il n'y pas d'ambiguité, on note la matrice nulle tout simplement 0.

Exemple 4 $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Notation. Soit A une matrice de type (n, p). L'élément situé sur la $i$ème ligne et $j$ème colonne se note a_{ij}. On note alors $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Exemple 5 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: $a_{11} = 1$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 4$; $a_{22} = 5$; $a_{23} = 6$.

2 Calcul matriciel

2.1 Egalité

Définition 1 Deux matrices A et B sont égales si et seulement si :

1. elles sont de même type
2. Pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$: $a_{ij} = b_{ij}$

2.2 Addition

Définition 2 Si A et B sont deux matrices de **même type** (n, p), la matrice $S = A + B$ est la matrice de type (n, p) telle que pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple 6 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

2.3 Multiplication par un réel

Définition 3 Si A est une matrice de type (n,p) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $M = \lambda.A$ est la matrice de type (n,p) telle que pour tout couple (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$:

$$m_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Exemple 7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et si $\lambda = 2$: $2.A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

2.4 Multiplication de deux matrices

Définition 4 Si A est une matrice de type (n,p) et si B est une matrice de type (p,r), la matrice $P = A \times B$ est la matrice de type (n,r) telle que pour tout couple (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant r$:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Exemple 8 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 7 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: $A \times B = \begin{pmatrix} 48 & 12 & 19 & 1 \\ 114 & 39 & 49 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque 1 Pour effectuer le produit $A \times B$ il faut que B ait autant de lignes que A a de colonnes.
Le résultat est une matrice ayant autant de lignes que A et de colonnes que B.
On peut mémoriser ce résultat en le comparant à la relation de Chasles :

$$(n,p) + (p,r) = (n,r)$$

Remarque 2 Pour trouver l'élément du produit $A \times B$ situé sur la $i$ème ligne et $j$ème colonne, on multiplie la $i$ème ligne de A par la $j$ème colonne de B.

Remarque 3 Pour toute matrice M carrée d'ordre n : $M \times I_n = I_n \times M = M$

Remarque 4 Pour toute matrice M de type $(n;p)$: $M \times 0_{p,r} = 0_{n,r}$ et $0_{m,n} \times M = 0_{m,p}$

2.5 Propriétés

Pour tous réels et toutes matrices de types convenables (pour que les opérations soient réalisables) on a :

1. $A + B = B + A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$
5. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A = \mu.(\lambda.A)$
7. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
8. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
9. $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$

3 Exemple d'application

Soit le système $\left\{\begin{array}{r} y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = 2 \\ -x + y = 3 \end{array}\right.$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice A telle que $A \times X = B$.
2. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$
3. En déduire la matrice A' telle que $A \times A' = A' \times A = I$
4. En déduire X puis la solution du système proposé

Remarque 5 La matrice A' déterminée dans l'exercice précédent s'appelle matrice inverse de A et se note A^{-1}.
Beaucoup de calculatrices calculent les inverses de matrices lorsque celles ci existent (ce qui n'est pas toujours la cas)