6 Solutions

Solution de l'exercice 1

1. $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = x + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
2. $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
4. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
5. $f(x) = \sqrt{1+\frac{x}{3}} = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{72}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
6. $f(x) = x^2\sqrt{3+x} = \sqrt{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
8. $f(x) = \frac{\sin 3x}{e^{2x}} = 3x - 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
9. $f(x) = 2\sin x\cos x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
10. $f(x) = \frac{\ln(2+4x)}{\sqrt{2+6x}} = (2+6x)^{-\frac{1}{2}}\ln(2+4x) = 2^{-\frac{1}{2}}(1+3x)^{-\frac{1}{2}}(\ln 2 + \ln(1+2x))$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln 2 + \frac{1}{2}x\sqrt{2}\left(-\frac{3}{2}\ln 2 + 2\right) + \frac{1}{2}x^2\sqrt{2}\left(\frac{27}{8}\ln 2 - 5\right) + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$
11. $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^3}} = \left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\left(1+x^2\right) = x^2 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Solution de l'exercice 2 *Indiquer à chaque fois que* $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ (ou $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$) *pour pouvoir conclure.*

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left[x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right]}{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6} + \varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \frac{x}{2} - \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right]}{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8} + \varepsilon(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)} = \frac{1}{4}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + x\varepsilon(x) - \left[1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)\right]}{x}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x + x\varepsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2} + \varepsilon(x)\right] = \frac{3}{2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x + 1 - e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[1 + x + x\varepsilon(x)\right] + 1 - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]}{x}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)\right] = 0$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - xe^x - e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x) - x\left[1 + x + x\varepsilon(x)\right] - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right]}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2x\varepsilon(x) - 1\right)^2}$
$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2 + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t(t+3)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)[t+t\varepsilon(t)]}{t(t+3)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+t\varepsilon(t)}{t(t+3)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+\varepsilon(t)}{t+3}=\dfrac{1}{3}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^2-e^x}{1-\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^2-e^{2+t}}{1-\sqrt{1+t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^2(1-e^t)}{1-\sqrt{1+t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^2[1-\{1+t+t\varepsilon(t)\}]}{1-\left[1+\frac{1}{2}t+t\varepsilon(t)\right]}$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^2[-t+t\varepsilon(t)]}{-\frac{1}{2}t+t\varepsilon(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^2[-1+\varepsilon(t)]}{-\frac{1}{2}+\varepsilon(t)}=2e^2$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)-\dfrac{1}{t}\right]=$
$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)-t}{t^2}=-\dfrac{1}{2}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x(x+1)}}{x-xe^{1/x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{t}-\sqrt{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{t}e^t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+t}}{1-e^t}$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\left[1+\frac{1}{2}t+t\varepsilon(t)\right]}{1-[1+t+t\varepsilon(t)]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}t+t\varepsilon(t)}{-t+t\varepsilon(t)}=\dfrac{1}{2}$

Exercice 12 On notera $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0

1. $f(x)=\operatorname{sh}x=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=x+\dfrac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T}: y=x$
$f(x)-x=\dfrac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $\dfrac{1}{6}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x>0\Rightarrow f(x)-x>0\Rightarrow\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x<0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$
2. $f(x)=\sin x(1+\cos x)=2x-\dfrac{11}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T}: y=2x$
$f(x)-2x=-\dfrac{11}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $-\dfrac{11}{6}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x>0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x<0\Rightarrow f(x)-x>0\Rightarrow\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$
3. $f(x)=x^2-2e^x=-2-2x-\dfrac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T}: y=-2-2x$
$f(x)-(-2-2x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $-\dfrac{1}{3}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x>0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x<0\Rightarrow f(x)-x>0\Rightarrow\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$
4. $f(x)=x^2+2\ln(1+x)=2x+\dfrac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T}: y=2x$
$f(x)-2x=\dfrac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $\dfrac{2}{3}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x>0\Rightarrow f(x)-x>0\Rightarrow\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x<0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$
5. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{1+x}=-1+x+x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T}: y=-1+x$
$f(x)-(-1+x)=x^3+x^3\varepsilon(x)$ a même signe que x^3 au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x>0\Rightarrow f(x)-x>0\Rightarrow\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x<0\Rightarrow f(x)-x<0\Rightarrow\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$

6. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T} : y = 1 + \frac{1}{2}x$
$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $\frac{1}{16}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x > 0 \Rightarrow f(x) - x > 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x < 0 \Rightarrow f(x) - x < 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$
7. $f(x) = \frac{1 + \ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T} : y = 1 + \frac{1}{2}x$
$f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = -\frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe que $-\frac{5}{8}x^2$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $f(x) - x \leq 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$
8. $f(x) = e^{2x}\cos 3x = 1 + 2x - \frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T} : y = 1 + 2x$
$f(x) - (1 + 2x) = -\frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe que $-\frac{5}{2}x^2$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $f(x) - x \leq 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$
9. $f(x) = \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T} : y = x$
$f(x) - x = -\frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ a même signe que $-\frac{1}{3}x^3$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $x > 0 \Rightarrow f(x) - x < 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{T}$ et
toujours au voisinage de 0 :$x < 0 \Rightarrow f(x) - x > 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$
10. $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
La troncature à l'ordre 1 de la partie régulière du développement limité de $f(x)$ donne une équation de $\mathcal{T} : y = 1$
$f(x) - 1 = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ a même signe que $\frac{1}{2}x^2$ au voisinage de 0.
Donc, au voisinage de 0 : $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{T}$

Exercice 13 En posant $t = \frac{1}{x}$:

$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t^2}\ln(1+t) = \frac{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{3} + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

D'où $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

Donc la droite Δ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$

$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ a même signe que $\frac{1}{3x}$ au voisinage de $+\infty$.

Donc au voisinage de $+\infty$: $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$: $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ.

De même la droite Δ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et, au voisinage de $-\infty$ $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ

Exercice 14 En posant $t = \frac{1}{x}$:

$f(x) = (x^2+x)\, e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right) e^t = \frac{1}{t^2}(1+t)\, e^t = \frac{1}{t^2}(1+t)\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)\right]$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$

D'où $f(x) = \frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}t+t\varepsilon(t) = x^2+2x+\frac{3}{2}+\frac{2}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$

Donc la courbe d'équation $y = x^2+2x+\frac{3}{2}$ est asymptote à C_f vers $+\infty$

$f(x)-\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ a même signe que $\frac{2}{3x}$ au voisinage de $+\infty$

Donc au voisinage de $+\infty$: $f(x)-\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right) > 0$: $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ.

De même la courbe d'équation $y = x^2+2x+\frac{3}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et, au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ

Exercice 15 Poser $t = \frac{1}{x}$ et remarquer que $t > 0$ si on étudie au voisinage de $+\infty$ et $t < 0$ si on étudie au voisinage de $-\infty$.
Ne pas oublier que $t > 0 \Rightarrow |t| = t$ et que $t < 0 \Rightarrow |t| = -t$

1. Au voisinage de $+\infty$:
   $f(x) = x+\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{1}{t}+\frac{1}{|t|}\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sqrt{1-t^2}$
   $= \frac{1}{t}+\frac{1}{t}\left[1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+t^4\varepsilon(t)\right] = 2x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   On en déduit que Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ.
   Au voisinage de $-\infty$:
   $f(x) = x+\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{1}{t}+\frac{1}{|t|}\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{t}-\frac{1}{t}\sqrt{1-t^2}$
   $= \frac{1}{t}-\frac{1}{t}\left[1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+t^4\varepsilon(t)\right] = \frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   On en déduit que Δ d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ
2. Au voisinage de $+\infty$:
   $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}e^t = \frac{1}{t}\left[1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)\right] = x+1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   On en déduit que Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ.
   Au voisinage de $-\infty$: résultat identique.
   On en déduit que Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ
3. Au voisinage de $+\infty$:
   $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{t^2}\sin t = \frac{1}{t^2}\left[t-\frac{t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)\right] = x-\frac{1}{6x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   On en déduit que Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ
   Au voisinage de $-\infty$: résultat identique.
   On en déduit que Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ
4. Au voisinage de $+\infty$:
   $f(x) = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{|t|}\sqrt{1-t^2}$
   $= \frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+t^4\varepsilon(t)\right]+\frac{1}{t}\left[1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+t^4\varepsilon(t)\right] = \frac{2}{t}-\frac{1}{4}t^3+t^3\varepsilon(t)$

$f(x) = 2x - \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
On en déduit que Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ
Au voisinage de $-\infty$:
$f(x) = \dfrac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2} + \dfrac{1}{|t|}\sqrt{1-t^2} = -\dfrac{1}{t}\left[\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}\right] = -\dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{4}t^3 + t^3\varepsilon(t)$
$f(x) = -2x + \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{1}{x^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
On en déduit que Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $-\infty$ et qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ