

# Tests de validité d'hypothèse

## 1 Test de comparaison de la moyenne d'une population à un nombre fixé

Il faut, à partir d'un échantillon, prendre une décision : Accepter ou rejeter l'hypothèse  $H_0$  (dite hypothèse nulle) que la moyenne de la population est  $m_0$ .

Cette décision est aléatoire. Elle dépend de l'échantillon.

Les conditions de rejet de  $H_0$  définissent l'hypothèse alternative  $H_1$ .

Quelle que soit la décision prise, on court un risque qu'il faut fixer à l'avance.

Deux sortes de risques existent :

1. Le risque de première espèce, noté  $\alpha$ , est la probabilité de rejeter à tort  $H_0$ .
2. Le risque de seconde espèce, noté  $\beta$ , est la probabilité d'accepter à tort  $H_0$ .

### 1.1 Test bilatéral relatif à une moyenne

1. Construction du test

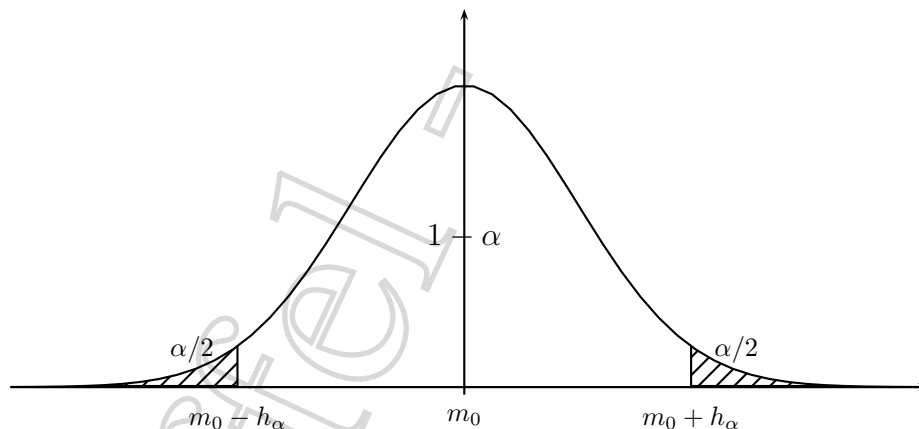
- Hypothèse nulle :  $H_0$  : "  $m = m_0$  "
- Hypothèse alternative :  $H_1$  : "  $m \neq m_0$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .

Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(m_0 - h_\alpha \leq \bar{X}_n \leq m_0 + h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

On prélève un échantillon de taille  $n$  et on calcule sa moyenne  $m_e$ .

- Si  $m_e \in [m_0 - h_\alpha; m_0 + h_\alpha]$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $m_e \notin [m_0 - h_\alpha; m_0 + h_\alpha]$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$



### 1.2 Test unilatéral gauche relatif à une moyenne

1. Construction du test

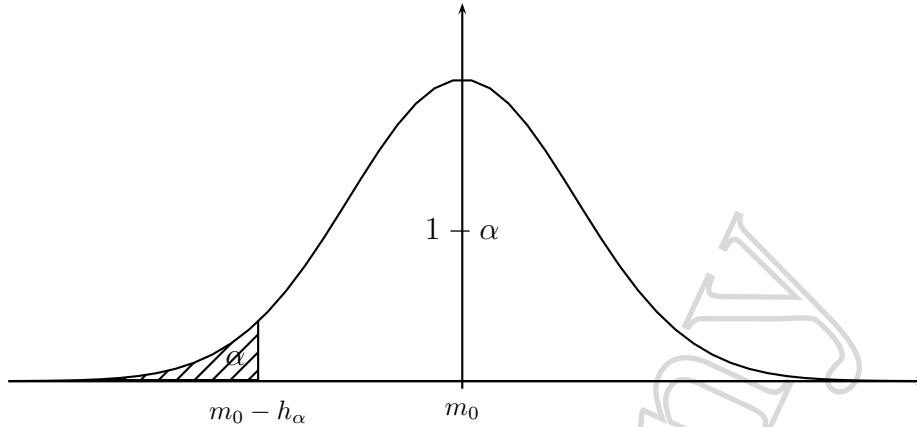
- Hypothèse nulle :  $H_0$  : "  $m = m_0$  "
- Hypothèse alternative :  $H_1$  : "  $m < m_0$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .

- Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(\bar{X}_n \geq m_0 - h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

Soit  $m_e$  la moyenne de l'échantillon de taille  $n$

- Si  $m_e > m_0 - h_\alpha$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $m_e \leq m_0 - h_\alpha$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$



### 1.3 Test unilatéral droit relatif à une moyenne

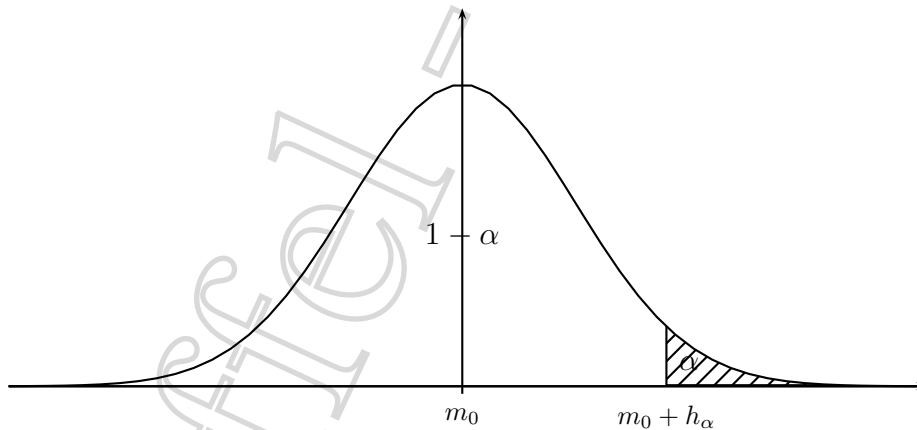
1. Construction du test

- Hypothèse nulle :  $H_0$  : "  $m = m_0$  "
- Hypothèse alternative :  $H_1$  : "  $m > m_0$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .
- Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(\bar{X}_n \leq m_0 + h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

Soit  $m_e$  la moyenne de l'échantillon de taille  $n$

- Si  $m_e \leq m_0 + h_\alpha$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $m_e > m_0 + h_\alpha$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$



## 2 Test de comparaison des moyennes de deux populations

Il faut, à partir de deux échantillons, prendre une décision : Accepter ou rejeter l'hypothèse  $H_0$  (dite hypothèse nulle) que la moyenne de la population  $\mathcal{P}_1$  est la même que la moyenne de la population  $\mathcal{P}_2$ .

L'hypothèse alternative  $H_1$  définit les conditions de rejet de  $H_0$ .

On fera intervenir la variable aléatoire  $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$  où  $X_k$  est la variable aléatoire qui, à un échantillon (aléatoire et non exhaustif) de taille  $n_k$  de  $\mathcal{P}_k$  associe sa moyenne.

**Remarque 1** Si  $\bar{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1; \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right)$  et  $\bar{X}_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_2; \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right)$  et si  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  sont indépendantes,  $\bar{D} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 - m_2; \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$ .

En particulier, si on suppose que  $m_1 = m_2$  :  $\bar{D} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0; \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

## 2.1 Test bilatéral de comparaison de deux moyennes

1. Construction du test

- *Hypothèse nulle* :  $H_0$  : "  $m_1 = m_2$  "
- *Hypothèse alternative* :  $H_1$  : "  $m_1 \neq m_2$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .
- Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(-h_\alpha \leq \bar{D} \leq h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

- On prélève un échantillon de taille  $n_1$  de  $\mathcal{P}_1$  et on calcule sa moyenne  $\bar{x}_1$ .
- On prélève un échantillon de taille  $n_2$  de  $\mathcal{P}_2$  et on calcule sa moyenne  $\bar{x}_2$ .
- Si  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in [-h_\alpha; h_\alpha]$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \notin [-h_\alpha; h_\alpha]$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$

## 2.2 Test unilatéral de comparaison de deux moyennes

1. Construction du test

- *Hypothèse nulle* :  $H_0$  : "  $m_1 = m_2$  "
- *Hypothèse alternative* :  $H_1$  : "  $m_1 < m_2$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .
- Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(\bar{D} > h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

- On prélève un échantillon de taille  $n_1$  de  $\mathcal{P}_1$  et on calcule sa moyenne  $\bar{x}_1$ .
- On prélève un échantillon de taille  $n_2$  de  $\mathcal{P}_2$  et on calcule sa moyenne  $\bar{x}_2$ .
- Si  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq h_\alpha$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < h_\alpha$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$

## 3 Tests relatifs à une proportion

Les raisonnements sont analogues. Il suffit d'utiliser la variable aléatoire  $F$  en lieu et place de  $\bar{X}_n$ . Par exemple :

**Test bilatéral relatif à une proportion :**

1. Construction du test

- *Hypothèse nulle* :  $H_0$  : "  $p = p_0$  "
- *Hypothèse alternative* :  $H_1$  : "  $p \neq p_0$  "
- On choisit un risque  $\alpha$ .
- Sous  $H_0$  (si  $H_0$  est vraie), on détermine  $h_\alpha$  tel que  $P(p_0 - h_\alpha \leq F \leq p_0 + h_\alpha) = 1 - \alpha$

2. Règle de décision :

- On prélève un échantillon de taille  $n$ .
- On calcule la proportion  $p_e$  d'individus vérifiant la propriété  $A$ .
- Si  $p_e \in [p_0 - h_\alpha; p_0 + h_\alpha]$ , on accepte  $H_0$  et donc on rejette  $H_1$
- Si  $p_e \notin [p_0 - h_\alpha; p_0 + h_\alpha]$ , on rejette  $H_0$  et donc on accepte  $H_1$

On construit de la même façon des tests unilatéraux et des tests de comparaison de proportions.