



# Bac blanc

## 1 Exercice 1 : pour tous les candidats

1. Pour tout nombre complexe  $Z$ , on pose  $P(Z) = Z^4 - 1$ .

(a) Factoriser  $P(Z)$ .

(b) En déduire les solutions dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes de l'équation  $P(Z) = 0$ , d'inconnue  $Z$ .

(c) Déduire de la question précédente les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation d'inconnue  $z$  :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. (a) Le plan complexe ( $P$ ) est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (l'unité graphique est 5 cm).

Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$a = -2, b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \text{ et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

(b) Démontrer que les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point  $D$  d'affixe  $d = -\frac{1}{2}$ .

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe  $z'$  défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

En déduire le rapport  $\frac{CA}{CD}$ .

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de  $z'$  ?

## 2 Exercice 2 : pour les non spécialistes seulement

Dans cet exercice, on se propose d'encadrer l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx.$$

1. En étudiant les variations des fonctions

$$x \xrightarrow{g} e^{-x} + x - 1 \quad \text{et} \quad x \xrightarrow{h} 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

sur l'intervalle  $[0; 1]$ , démontrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (1).$$

2. Dédurre de (1) un encadrement de  $e^{-x^2}$  pour  $x$  élément de  $[0; 1]$ , puis montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)} \quad (2).$$

3. (a) Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$  :  $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$ .  
 (b) Dédurre alors de (2) que :  $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$ .  
 Donner une valeur approchée de  $K$  à  $3 \cdot 10^{-2}$  près.

### 3 Exercice 2 : pour les spécialistes seulement

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct  $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 3 cm).

#### Partie A

Soit trois droites  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  sécantes en  $\Omega$ , de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{d}_1 = \vec{u}$ ,  $\vec{d}_2$  et  $\vec{d}_3$ , supposés unitaires et tels que  $(\vec{d}_1, \vec{d}_2) = \frac{\pi}{4}$  et  $(\vec{d}_1, \vec{d}_3) = -\frac{2\pi}{3}$ .  
 On note  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  les réflexions d'axes respectifs  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  et  $f$  la composée  $S_3 \circ S_2 \circ S_1$  de ces trois réflexions.

- Tracer ces trois droites.
- (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $r = S_2 \circ S_1$ .  
 (b) Caractériser la réflexion  $S$  telle que  $r = S_3 \circ S$ .  
 Soit  $(D)$  l'axe de  $S$ , déterminer un point et un vecteur directeur  $\vec{d}$  de  $(D)$ .  
 Tracer la droite  $(D)$ .  
 (c) En déduire la nature de  $f$  et ses éléments caractéristiques.
- Justifier que le point  $E$  d'affixe  $z_E = e^{\frac{i\pi}{12}}$  est un point de la droite  $(D)$ .  
 Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que la forme complexe de  $f$  soit l'application  $f_1$  définie sur  $\mathbb{C}$  par  $f_1(z) = a\bar{z} + b$ .

#### Partie B

- Choisir un point  $A$  sur  $(D)$ .  
 On note  $B$  l'image de  $A$  par  $S_1$  et  $C$  l'image de  $B$  par  $S_2$ .  
 Placer les points  $B$  et  $C$ .
- Démontrer que  $A$  est l'image de  $C$  par  $S_3$ .
- Que peut-on dire du point  $\Omega$  pour le triangle  $ABC$  ?

### 4 Problème : pour tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ .

On appelle  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$ ,

dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan

(unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

#### Partie I

- Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et 0.

2. Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .  
 Montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $(\ln x)(2 - \ln x)$ .  
 Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

3. Tracer la représentation graphique  $(\mathcal{C})$  de  $f$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

4. On pose pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$$

- a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

- b) Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$$

- c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ .  
 d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de  $(\mathcal{C})$ , d'abscisses comprises entre 1 et  $e^2$ .  
 Le point  $M$  de  $(\mathcal{C})$ , d'abscisse  $x$ , décrit alors un cercle de rayon  $f(x)$ .  
 Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

## Partie II

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $A$  le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse  $a$ .  
 Soit  $(T_a)$  la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point  $A$ .

- Écrire une équation de  $(T_a)$ .
- Déterminer les réels  $a$  pour lesquels  $(T_a)$  passe par l'origine  $O$  du repère.
- Donner une équation de chacune des tangentes à  $(\mathcal{C})$ , passant par  $O$ .  
 Tracer ces tangentes sur la figure.

## Partie III

On étudie maintenant l'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = \frac{1}{e^2}x$ .

- On pose pour  $x$  strictement positif,  $\varphi_1(x) = x - e \ln x$ .  
 Montrer que  $\varphi_1$  est strictement croissante sur  $]e; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0; e[$ .
- On pose pour  $x$  strictement positif,  $\varphi_2(x) = x + e \ln x$ .
  - Étudier le sens de variation de  $\varphi_2$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - Prouver que  $\varphi_2(x) = 0$  a une solution unique sur  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .  
 On appelle  $\alpha$  cette solution ; donner un encadrement de  $\alpha$ , d'amplitude  $10^{-1}$ .
  - En déduire que  $\varphi_2(x) = 0$  a une seule solution sur  $]0; +\infty[$ .
- Déterminer les points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et de  $(\Delta)$ .