Calcul intégral

1 Propriétés de l'intégrale

1.1 Relation de Chasles

Théorème 1 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b, c de I :

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.
$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\ dx$

1.2 Linéarité

Théorème 2 Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b de I :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

Théorème 3 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b de I et pour tout réel λ :

$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$

1.3 Positivité

Théorème 4 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b de I **tels que** $a \leq b$:

1. $f \geq 0$ sur $I \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$
2. $f \leq 0$ sur $I \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq 0$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.
Si $f \geq 0$ sur I alors F est croissante sur I car $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.
Donc $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \geq 0$.
Démonstration analogue pour $f \leq 0$ sur I.

Corollaire 1 Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I.
Quels que soient les réels a, b de I **tels que** $a \leq b$:

$$f \leq g \text{ sur } [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

Démonstration. $f \leq g$ sur $I \Leftrightarrow (f - g) \leq 0$ sur $I \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \leq 0$
D'où $\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx \leq 0$ puis le résultat.

1.4 Inégalités de la moyenne

Théorème 5 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soient m et M deux réels.
Quels que soient les réels a, b de I **tels que** $a \leq b$:

$$m \leq f \leq M \text{ sur } [a;b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent :
$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ d'où le résultat.

Corollaire 2 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Quels que soient les réels a, b de I :

$$|f| \leq M \text{ sur } [a;b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M|b-a|$$

Démonstration. $-M \leq f \leq M$ sur I
$a \leq b \Rightarrow -M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a) = M|b-a|$
$a \geq b \Rightarrow \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leq M|a-b|$ d'après ce qui précède.
Or $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|-\int_b^a f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right|$ et $|a-b| = |b-a|$ d'où le résultat.

Définition 1 Soit f une fonction admettant des primitives sur $[a;b]$ avec $a < b$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque 1 μ est une des deux dimensions du rectangle dont l'aire est $\int_a^b f(x)\,dx$, l'autre dimension étant $(b-a)$.

Exemple 1 La valeur moyenne sur $[0;\pi]$ de la fonction sinus est $\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$

1.5 Parité - Périodicité

Nous admettrons les résultat suivants que l'on pourra deviner grâce à l'interprétation graphique de l'intégrale.

Théorème 6 Soit f une fonction admettant des primitives sur $[-a;a]$ avec $a > 0$.

1. Si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
2. Si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Théorème 7 Soit f une fonction admettant des primitives sur $\mathbb{R}$ et admettant T pour période.
Pour tout réel a on a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

2 Intégration par parties

Théorème 8 Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I et si u' et v' admettent des primitives sur I, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\ dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\ dx$$

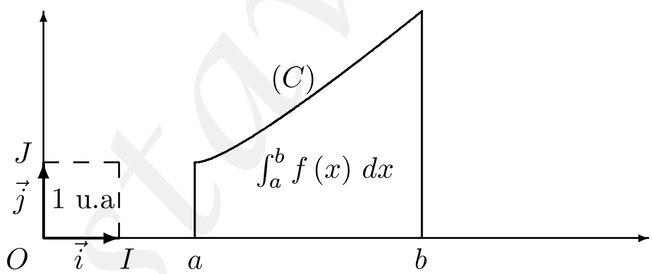
Démonstration. $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - u'v$.
D'où $\int_a^b u(x).v'(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx - \int_a^b u'(x).v(x)\ dx$
D'où le résultat puisque $\int_a^b (uv)'(x)\ dx = [(uv)(x)]_a^b$

Exemple 2 Soit $I = \int_1^e x \ln x\, dx$

Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.
Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$ (on a le choix pour $v(x)$).
Alors $I = \left[\frac{x^2}{2}.\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

3 Aires - Volumes

Théorème 9 Soit f une fonction admettant des primitives sur $[a;b]$. (on a donc $a \leq b$!).
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\ dx$. Résultat en **unités d'aire** : aire du rectangle de côtés OI et OJ où I et J sont définis par $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$



Remarque 2 Si $f \leq 0$ sur $[a;b]$, les représentations graphiques de f et de $-f$ étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\ dx$

Remarque 3 Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut, en unités d'aire : $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$

Théorème 10 Soit Λ un solide de l'espace limité par deux plans d'équations $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$. Si le plan d'équation $z = t$ coupe le solide Λ suivant une surface d'aire $S(t)$, le volume, en unités de volume, du solide Λ vaut

$$V = \int_a^b S(t)\ dt$$

4 Primitives et intégrales

Théorème 11 Si f admet des primitives sur l'intervalle I et si $a \in I$, la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est **la** primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. Si F désigne un primitive de f sur I :
$\forall x \in I : \varphi(x) = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$
F étant dérivable sur I, φ est dérivable sur I et $\forall x \in I : \varphi'(x) = F'(x) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur I.
De plus $\varphi(a) = F(a) - F(a) = 0$

Exemple 3 $\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt}$

Remarque 4 Le théorème peut être utile pour déterminer une primitive. Par exemple :

Déterminons une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$.
$\int_1^x \ln t\,dt$ est la primitive de ln sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.
Or $\int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1$
La fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = x\ln x - x + 1$ est donc la primitive de ln sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.
Remarque : la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de ln *sur $]0;+\infty[$ car F et φ diffèrent d'une constante*