



Correction bac blanc

1 Exercice 1

1. (a) $P(Z) = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = \underline{(Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)}$
 (b) Donc l'ensemble S des solutions est : $S = \{1, -1, i, -i\}$.
 (c) Pour $z \neq 1$, si l'on pose $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ alors l'équation devient $Z^4 = 1$, d'où quatre cas :
- $$\begin{cases} Z = 1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow 2z+1 = z-1 \Leftrightarrow z = -2 \\ Z = -1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow 2z+1 = -z+1 \Leftrightarrow z = 0 \\ Z = i \Leftrightarrow 2z+1 = iz-i \Leftrightarrow z = \frac{-1-i}{2-i} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ Z = -i \Leftrightarrow 2z+1 = -iz+i \Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2+i} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{cases}$$
- Donc l'ensemble S' des solutions est : $S' = \underline{\{-2, 0, -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\}}$.

2. (a) Tracés des points A, B et C .
 (b) Soit I le milieu de $[OA]$, alors I est d'affixe (-1) et on a :
 $IB = |b+1| = |\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i| = 1, IC = |c+1| = |\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i| = 1$ et $OI = 1 = OA$.
 Donc les points O, A, B et C appartiennent au cercle de diamètre $[AO]$.

3. On a : $z' = \frac{a-c}{d-c} = \frac{-2 - (-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)}{-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i)} = \frac{-\frac{9}{5} - \frac{3}{5}i}{-\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i} = 2 - 2i = \underline{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Ainsi : $\frac{CA}{CD} = \left| \frac{a-c}{d-c} \right| = 2\sqrt{2}$ et $(\widehat{CD, CA}) = \arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Or le triangle (OCA) est rectangle en C , donc la droite (CD) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{CO, CA})$.

2 Exercice 2 non spécialistes

1. Les fonctions g et h sont définies, dérivables sur $[0; 1]$, avec :
 $g'(x) = 1 - e^{-x}$ et $h'(x) = -1 + x + e^{-x} = g(x)$

| | | |
|------|---|---|
| x | 0 | 1 |
| g' | 0 | + |
| g | 0 | |
| h' | 0 | + |
| h | 0 | |

D'où, sur $[0; 1]$: $\begin{cases} g(x) = e^{-x} + x - 1 \geq 0 \\ h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \geq 0 \end{cases}$,
 ou encore, $\begin{cases} e^{-x} \geq 1 - x \\ 1 - x + \frac{x^2}{2} \geq e^{-x} \end{cases}$,
 donc $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

2. $0 \leq x \leq 1$ nous donne $0 \leq x^2 \leq 1$
 Ainsi, en remplaçant x par x^2 dans la relation (1), on obtient : $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
 De plus, pour $x \in [0; 1]$, $1 + x > 0$ et $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$,
 d'où : $\frac{1-x^2}{1+x} = 1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{x^4}{2(1+x)} = 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$
3. (a) $(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1 = x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - x - 1 + 1 = x^4$
 Ainsi : $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$, pour $x \in [0; 1]$

- (b) On a, pour $x \in [0; 1]$: $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2(1+x)}$
 Ainsi : $\int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx$
 $\left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \leq K \leq \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \ln 2$
 Donc $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$, avec, $\frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2} \leq 0,56$.
 Conclusion : 0,53 est une valeur approchée de K à $3 \cdot 10^{-2}$ près.

3 Exercice 2 spécialistes

Partie A

- Tracés de (D_1) , (D_2) et (D_3) .
- Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en Ω avec $2(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}) = \frac{\pi}{2}$,
 donc $r = S_2 \circ S_1$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - Soit (D) la droite issue de Ω et de vecteur directeur \vec{d} vérifiant $(\widehat{\vec{d}, \vec{d}_3}) = \frac{\pi}{4}$,
 on a $r = S_3 \circ S$, avec S la réflexion d'axe (D) .
 - Ainsi, $f = S_3 \circ (S_2 \circ S_1) = S_3 \circ r = S_3 \circ S_3 \circ S = S$, donc f est la réflexion d'axe (D) .
- On a $(\widehat{\vec{u}, \vec{d}}) = (\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}}) = (\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_3}) + (\widehat{\vec{d}_3, \vec{d}}) = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{\Omega E}}) = \frac{\pi}{12}$.
 Ainsi $(\widehat{\vec{d}, \vec{\Omega E}}) = (\widehat{\vec{d}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{\Omega E}}) = \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \pi$. Donc : E se situe sur (D) .
 De plus, $f(\Omega) = \Omega$ et $f(E) = E$ nous donnent respectivement
 $f_1(0) = b = 0$ et $f_1\left(e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = ae^{-\frac{i\pi}{12}} + b = e^{\frac{i\pi}{12}}$. On en déduit $a = e^{\frac{i\pi}{6}}$ et donc $f_1(z) = e^{\frac{i\pi}{6}z}$

Partie B

- Tracés des points B et C .
- $A \in (D)$, d'où $S(A) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(A) = S_3 \circ S_2(B) = S_3(C) = A$
- Les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) représentent les médiatrices respectives des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, car $S_1(A) = B$, $S_2(B) = C$ et $S_3(C) = A$.
 Ces trois droites étant sécantes en Ω , le point Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) .

4 Problème

Partie I

- $\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2$. Or (formulaire) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc $\lim_{+\infty} f = 0$.
 $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, d'où, $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$.
 Donc $\lim_0 f = +\infty$.

2.

f est définie, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec :
 $f'(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$.

Il en résulte que sur $]0, +\infty[$,
 $f'(x)$ est du signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$.

| | | | | |
|-------------|-----------|------------|------------|------------|
| x | 0 | 1 | e^2 | $+\infty$ |
| $\ln x$ | | - | 0 | + |
| $2 - \ln x$ | | + | + | 0 |
| f' | | - | 0 | + |
| f | $+\infty$ | \searrow | \nearrow | \searrow |
| | | | 0 | 0 |

3. Tracé.

4. (a) Posons : $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \ln x$.

Ces deux fonctions sont deux fois dérivables sur l'intervalle $[1, e^2]$, avec, $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Ainsi, } I_1 = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^{e^2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \left(\frac{1}{e^2} - 1\right).$$

$$\text{Donc : } \underline{I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}}$$

(b) Posons $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = (\ln x)^{p+1}$.

Ces deux fonctions sont deux fois dérivables sur l'intervalle $[1, e^2]$, avec, $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = (p+1)(\ln x)^p \times \frac{1}{x}$.

$$\text{Ainsi, } I_{p+1} = \left[-\frac{1}{x} (\ln x)^{p+1}\right]_1^{e^2} + (p+1) \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$$

$$\text{Donc : } \underline{I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p}$$

(c) $I_2 = -\frac{2^2}{e^2} + 2I_1 = 2 - \frac{10}{e^2}$; $I_3 = -\frac{2^3}{e^2} + 3I_2 = 6 - \frac{38}{e^2}$; $I_4 = -\frac{2^4}{e^2} + 4I_3 = 24 - \frac{168}{e^2}$.

(d) Le volume du solide obtenu est, en unités de volume,

$$V = \pi \int_1^{e^2} (f(x))^2 dx = \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^4}{x^2} dx = \pi I_4$$

$$\text{Donc : } \underline{V = \pi \left(24 - \frac{168}{e^2}\right)}$$

Partie II

1. (T_a) admet pour équation : $y = f(a) + (x-a)f'(a) = \frac{(\ln a)^2}{a} + (x-a) \frac{(2-\ln a) \ln a}{a^2}$.

$$\text{Donc : } \underline{y = \left(\frac{(2-\ln a) \ln a}{a^2}\right) x + \frac{(2 \ln a)(\ln a - 1)}{a}}$$

2. Les réels $a > 0$ pour lesquels le point O appartient à (T_a) sont les solutions de l'équation $(2 \ln a)(\ln a - 1) = 0$. Donc (T_a) passe par O si et seulement si $\underline{a = 1 \text{ ou } a = e}$.

3. (T_1) admet pour équation $(y = 0)$; (T_e) admet pour équation $(y = \frac{x}{e^2})$.

Partie III

1. φ_1 est définie, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec : $\varphi_1'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$.

Ainsi, $\varphi_1'(x)$ est strictement positif sur $]e; +\infty[$ et strictement négatif sur $]0; e[$.

Donc : $\underline{\varphi_1}$ est strictement croissante sur $]e; +\infty[$, strictement décroissante sur $]0; e[$.

2. (a) φ_1 est définie, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec : $\varphi_2'(x) = 1 + \frac{e}{x} = \frac{x+e}{x}$.

Ainsi, $\varphi_2'(x)$ strictement positif sur $]0; +\infty[$. Donc : $\underline{\varphi_2}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) φ_2 est dérivable, strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$,

donc réalise une bijection de $[\frac{1}{2}; 1]$ sur $[\varphi_2(\frac{1}{2}); \varphi_2(1)]$

Or : $\varphi_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - e \ln 2 < 0$ et $\varphi_2(1) = 1 > 0$.

Donc, l'équation $\varphi_2(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

On trouve : $\underline{0,7 < \alpha < 0,8}$

(c) φ_2 est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , ainsi $\begin{cases} \text{pour } x > 1, \varphi_2(x) > \varphi_2(1) > 0 \\ \text{pour } 0 < x < \frac{1}{2}, \varphi_2(x) < \varphi_2(\frac{1}{2}) < 0 \end{cases}$.

Donc : $\underline{\text{l'équation } \varphi_2(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0; +\infty[}$.

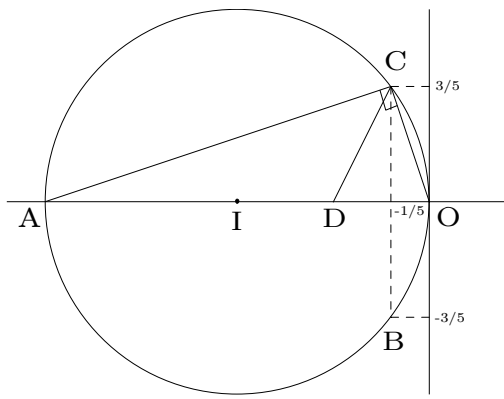
3. Les abscisses des points d'intersection de (\mathcal{C}) et de $(\Delta) = (T_e)$ sont les solutions de $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{x}{e^2}$.

Or : $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{x}{e^2}$ équivaut à $x^2 - (e \ln x)^2 = 0$, soit à $(x - e \ln x)(x + e \ln x) = \varphi_1(x) \times \varphi_2(x) = 0$.

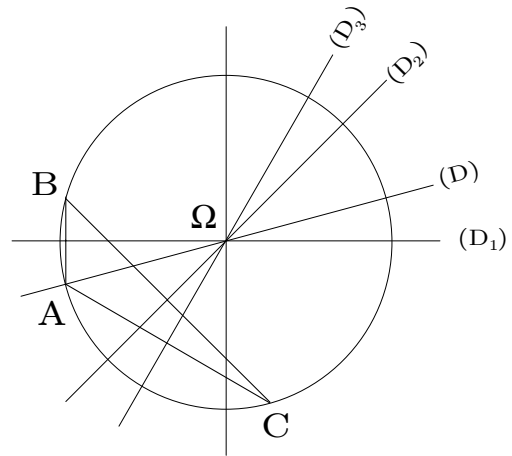
Donc : les points $\underline{B(e; \frac{1}{e})}$ et $\underline{C(\alpha; \frac{\alpha}{e^2})}$ sont les points d'intersection de (\mathcal{C}) et de (Δ) .



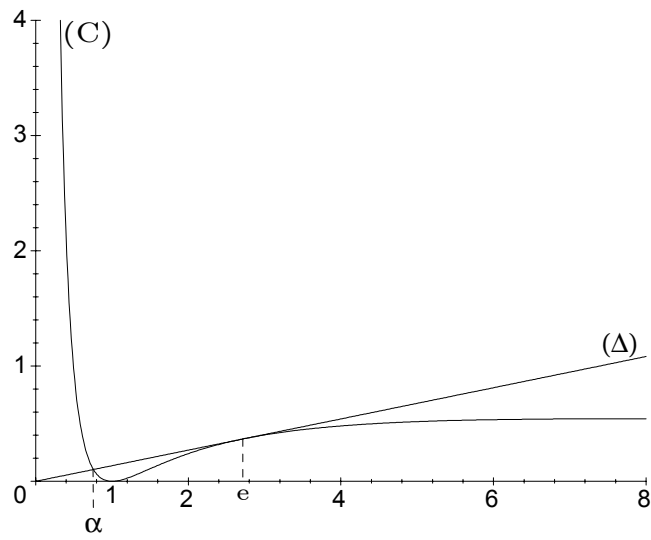
Tracés



Exercice 1



Exercice 2



Problème