Eléments de solution devoir 1

Exercice 1

1. (a) $z_1 = -1$ est racine évidente.
   (b) D'après (a) $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   Par identification (ou par division) on trouve $a = 1; c = 7$ et $b = -4$
   La résolution de $z^2 - 4z + 7 = 0$ donne $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 2 - i\sqrt{3}$

2. (a) Il suffit de montrer que $M_2 = r(M_3)$ où r est la rotation de centre M_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$
   Cela revient à montrer que $(z_2 - z_1) = e^{i\pi/3}(z_3 - z_1)$ ou encore $3 + i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}\left(3 - i\sqrt{3}\right)$ ce qui ne pose aucune difficulté après avoir utilisé $e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   On pouvait aussi montrer $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$ en utilisant $AB = |b - a|$
   (b) I a pour affixe $z_I = \dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$
   G a pour affixe $z_G = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$
   (c) Dans un triangle équilatéral, les médianes coïncident avec les hauteurs, médiatrices, etc...
   On place donc M_1 puis G, on trace le cercle de centre G de rayon 2 puis la droite d'équation $x = 2$. Cette droite coupe le cercle en deux points qui sont M_2 et M_3.

Exercice 2

1. B' a pour affixe $z_{B'} = \dfrac{z_B - 2}{z_B - 1} = \dfrac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(-3 - i\sqrt{3}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}{\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{6 - 2i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. I et J ont pour affixe z tel que $z = \dfrac{z-2}{z-1}$
   D'où $z(z-1) = z - 2$ puis $z^2 - 2z + 2 = 0$ d'où $z_I = 1 + i$ et $z_J = 1 - i$

   (a) $z_{\overrightarrow{AM}} = z - 1$ et $z_{\overrightarrow{AM'}} = z' - 1 = \dfrac{z-2}{z-1} - 1 = \dfrac{-1}{z-1}$
   (b) $AM' = \left|z_{\overrightarrow{AM'}}\right| = \dfrac{1}{|z-1|}$ et $AM = \left|z_{\overrightarrow{AM}}\right| = |z - 1|$. D'où $AM' = \dfrac{1}{AM}$
   Si $M \in \mathcal{C}$: $AM = 1$ d'où $AM' = 1$ et $M' \in \mathcal{C}$
   $AB = \left|\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Rightarrow B \in \mathcal{C}$

Exercice 3

1. $1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2} + \cdots + \dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} - 1}{\frac{a}{b} - 1} \Rightarrow b^{n+1}\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)\left(1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2} + \cdots + \dfrac{a^n}{b^n}\right) = a^{n+1} - b^{n+1}$
   D'où $b\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)b^n\left(1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2} + \cdots + \dfrac{a^n}{b^n}\right) = a^{n+1} - b^{n+1}$
   puis $(a-b)\left(b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^n\right) = a^{n+1} - b^{n+1}$
   et enfin : $(a-b)\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right) = a^n - b^n$

2. Si a et b sont entiers et si $n \in \mathbb{N}^*$: $b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \in \mathbb{N}^*$
   Donc $(a-b) \mid (a^n - b^n)$

3. (a) En remplaçant b par $-b$ on obtient : $(a+b)\left(b^{n-1} - ab^{n-2} + a^2b^{n-3} - \cdots + a^{n-1}\right) = a^n + b^n$
   ce qui montre que $(a+b) \mid (a^n + b^n)$

   (b) En remplaçant b par $-b$ on obtient : $(a+b)\left(-b^{n-1} + ab^{n-2} - a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right) = a^n - b^n$
   ce qui montre que $(a+b) \mid (a^n - b^n)$