



# Eléments de solution

## Exercice 1

1.  $\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$ . D'où les solutions :  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  et  $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

2. (a)  $|z_1| = |z_2| = 2$

Si  $\theta_1 = \arg z_1$  :  $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . D'où  $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ .

D'où  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$  et  $\arg z_2 = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$

(b)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_1} \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$  et  $\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = 2 \arg z_1$ .

Or  $\left| \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2$  et  $\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 = 2 \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right)$ , donc :

$$\left| \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right| = 1 \text{ et } \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 = \pi + k.2\pi$$

3. (a)  $h$  a pour écriture complexe  $z' - \frac{\sqrt{2}}{2} = -3 \left( z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

Donc, en remplaçant  $z$  par l'affixe  $z_2$  de  $M_2$ , que l'affixe de  $M_3$  est  $z_3 = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$

(b)  $r$  a pour écriture complexe  $z' = -iz$ .

Donc, en remplaçant  $z$  par l'affixe  $z_2$  de  $M_2$ , que l'affixe de  $M_4$  est  $z_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(c)  $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}} = \frac{-16i}{16i} = -i$

## Exercice 2

1. (a) Avec le barycentre partiel : soit  $B'$  le barycentre de  $[(A; 1); (C; 1)]$ , milieu de  $[AC]$ .

$G$  est le barycentre de  $[(B; -1); (B'; 2)]$ , défini par  $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BB'}$  : d'où sa construction.

(b) Soit  $B''$  le barycentre de  $[(A; 1); (C; -2)]$ , défini par  $\overrightarrow{AB''} = 2\overrightarrow{AC}$ .

$G'$  est le barycentre de  $[(B''; -1); (B; 5)]$ , défini par  $\overrightarrow{BG'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BB''}$  : d'où sa construction.

2. (a) Par définition de  $G'$  :  $4\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

Or, par définition de  $G$  :  $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

Donc  $4\overrightarrow{GG'} = 9\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$ . De manière analogue :  $4\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ . Or  $\overrightarrow{JA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . Donc  $4\overrightarrow{JG'} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

D'où  $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$  :

l'alignement des points  $G$ ,  $J$  et  $G'$  implique donc que  $(GG')$  coupe  $(AB)$  en  $J$ .

(b) Par définition de  $I$  :  $\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

Or  $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GI}$ . Donc  $I \in (GG')$ .

3. (a)  $K$  est par hypothèse isobarycentre de  $A$  et  $O$ , points affectés des mêmes coefficients.

$O$  est par hypothèse isobarycentre de  $C$  et  $D$ , points affectés des mêmes coefficients.

Le coefficient de  $O$  est le double de celui de  $C$  ou  $D$ , et le même que celui de  $A$  : soit  $a = 2\alpha$  et  $d = c = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Par exemple  $a = 2$  et  $b = c = 1$ .

- (b)  $K$ , barycentre de  $[(A; 2\alpha); (C; \alpha); (D; \alpha)]$ , est aussi barycentre de  $(D; \alpha)$  et du barycentre de  $[(A; 2\alpha); (C; \alpha)]$  qui est situé sur  $(AC)$  et aligné avec  $D$  et  $K$ . Ce barycentre de  $[(A; 2\alpha); (C; \alpha)]$  est donc le point  $X$ . Par suite  $a' = 2\alpha$  et  $c' = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Par exemple  $a' = 2$  et  $c' = 1$ .

**Exercice 3**

**Partie A**

$$\begin{cases} a + b = 11994 \\ a \wedge b = 1999 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1999 a' \\ b = 1999 b' \\ a' + b' = 6 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

Donc  $(a', b') \in \{(1, 5); (5, 1)\}$ . D'où  $(a, b) \in \{(1999, 9995); (9995, 1999)\}$

**Partie B**

- 3 est solution de l'équation.  $S$  est alors solution entière de  $9 - 3S + 11994 = 0$ . D'où  $S = 4001$  et la deuxième solution de l'équation est  $4001 - 3$ , soit 3998.
- De même, 5 étant solution de l'équation,  $S$  est solution entière de  $25 - 5S + 11994 = 0$ , soit de  $5S = 12019$ . Pas de solution entière pour  $S$  car 12019 n'est pas divisible par 5.
- Les entiers solutions de l'équation, quand ils existent, ont pour produit 11994. Ces entiers divisent donc  $11994 = 2 \times 3 \times 1999$ .  
Les huit diviseurs de 11994, qui sont 1, 2, 3, 6, 1999, 3998, 5997, 11994, donnent les quatre paires distinctes de solutions :  $\{1; 11994\}$ ;  $\{2; 5997\}$ ;  $\{3; 3998\}$ ;  $\{6; 1999\}$  qui conduisent aux quatre valeurs de  $S$  : 11995; 5999; 4001; 2005.

**Partie C**

Les seuls diviseurs premiers de 1999 sont compris entre 2 et  $\sqrt{1999}$ , soit entre 2 et 44. Aucun de ces entiers ne divise 1999 qui est donc premier.

**Exercice 4**

**Partie A**

Sur  $[0, 5; 2]$   $f'$  change de signe en passant de valeurs négatives à des valeurs positives : donc  $f$  admet un minimum sur cet intervalle.

Graphiquement on peut situer ce minimum dans l'intervalle  $]1, 5; 1, 7[$ .

**Partie B**

- $h'(x) = e^x + xe^x - 2e^x = (x - 1)e^x$ . Le signe de  $h'(x)$  sur  $[0; +\infty[$  est celui de  $x - 1$ .  
Par suite  $h$  est décroissante sur  $[0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$   
 $h(0) = 0$ .
- $h\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ . Donc  $h\left(\frac{3}{2}\right) < 0$   
 $h$  est dérivable et strictement croissante sur  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ ,  $h\left(\frac{3}{2}\right) < 0$  et  $h(2) = 2$  donc  $h(2) > 0$ . Il en résulte que l'équation  $h(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$  une solution unique. Soit  $a$  cette solution.  
Le signe de  $h(x)$  résulte des résultats établis à la question précédente et de ceux obtenus ci-dessus :  
 $h(x) \leq 0$  sur  $[0; a]$ ;  $h(x) \geq 0$  sur  $[a; +\infty[$
- (a)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$   
 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



(b)  $f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2x(e^x - 1)}{x^4} = \frac{x e^x - 2e^x + 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}$  :  $f'(x)$  est donc sur  $]0; +\infty[$  du signe de  $h(x)$  et par suite  $f$  est décroissante sur  $]0; a]$  et croissante sur  $[a; +\infty[$

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	$0$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	$0$
$f$	$\parallel$	$+\infty \searrow$	$f(a) \nearrow +\infty$

(c)  $f(a) = \frac{e^a - 1}{a^2}$

$h(a) = 0 \Rightarrow a e^a - 2e^a + 2 = 0 \Rightarrow e^a(a - 2) = -2 \Rightarrow e^a = \frac{-2}{a - 2}$ .

D'où  $f(a) = \frac{\frac{-2}{a-2} - 1}{a^2} = \frac{-a}{a^2(a - 2)} = \frac{-1}{a(a - 2)}$

D'où :  $a \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[ \Rightarrow a - 2 < 0 \Rightarrow f(a) > 0$

**Partie C**

1. La fonction  $f$  dérivable est intégrable et  $F$  en est la primitive nulle pour  $x = 1$  :  $F'(x) = f(x)$ .  
Or  $f > 0$  sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $F$  est strictement croissante sur cet intervalle.

2.  $f$  croissante sur  $]2; +\infty[ \Rightarrow f(2) \leq f(x) \Rightarrow \int_2^x f(2) dt \leq \int_2^x f(t) dt$

$F(x) = \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \Rightarrow F(x) \geq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(2) dt \Rightarrow F(x) \geq \int_1^2 f(t) dt + f(2)(x - 2)$ .

Or  $f$  est positive, donc  $\int_1^2 f(t) dt \geq 0$  d'où  $F(x) \geq f(2)(x - 2)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2)(x - 2) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$