Eléments de solution

Exercice 1

1. $(a \wedge b) \mid a$ et $(a \wedge b) \mid b$ donc $(a \wedge b) \mid a + b$
   $(a \wedge b) \mid a \Rightarrow (a \wedge b) \mid ab$
   $(a \wedge b) \in \text{Div}\,(a + b; ab) \Rightarrow (a \wedge b) \mid (a + b) \wedge ab$

2. (a) $\left.\begin{array}{r} p^2 \mid a + b \Rightarrow p^2 \mid a\,(a+b) \\ p^2 \mid ab \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 \mid a\,(a+b) - ab = a^2$
   $p \mid p^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a$ (*conséquence de Gauss car p premier donc $p \mid a$ ou $p \wedge a = 1$*)
   $\left.\begin{array}{r} p^2 \mid (a+b) \Rightarrow p \mid a + b \\ p \mid a \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid a + b - a = b$

   (b) $(a \wedge b) \mid (a + b) \wedge (ab) = p^2 \Rightarrow (a \wedge b) = 1$ ou p ou p^2.
   Or $p \mid a$ et $p \mid b$. Donc $(a \wedge b) \geqslant p$ donc $(a \wedge b) = p$ ou p^2

3. (a) 7 étant premier, d'après la question 2 : $(a \wedge b) = 7$ ou 7^2.
   Si $(a \wedge b) = 7^2$: $(a \wedge b) \mid a \Rightarrow 49 \mid (a \vee b)$
   Or 49 ne divise pas 231. Donc $(a \wedge b) = 7$

   (b) $ab = (a \wedge b) \times (a \vee b) \Rightarrow ab = 1617$.
   $(a \wedge b) = 7 \Rightarrow a = 7a'$ et $b = 7b'$ avec $a' \wedge b' = 1$.
   D'où $(7a')\,(7b') = 1617$ et donc $a'b' = 33$
   D'où $(a'; b') = (1; 33)$ ou $(33; 1)$ ou $(3; 11)$ ou $(11; 3)$
   et $(a; b) = (7; 231)$ ou $(231; 7)$ ou $(21; 77)$ ou $(77; 21)$
   • Si $(a; b) = (7; 231)$ ou $(231; 7)$: $(a \vee b) = \dfrac{ab}{a \wedge b} = \dfrac{231 \times 7}{7} = 231$
   et $(a + b \wedge ab) = (238 \wedge 1617) \neq 49$ car 49 ne divise pas 238.
   $(7; 231)$ et $(231; 7)$ ne sont donc pas solution
   • Si $(a; b) = (21; 77)$ ou $(77; 21)$: $(a \vee b) = \dfrac{21 \times 77}{7} = 231$
   et $(a + b \wedge ab) = (98; 1617) = 49$
   Il y a donc deux couples répondant à la question : $(21; 77)$ et $(77; 21)$

Exercice 2

1. (a) Notons B : "le jeton tiré provient de l'urne B".
   $p\,(E) = p\,(F \cap B) = p\,(F/B)\,p\,(B) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

   (b) Notons A : "le jeton tiré provient de l'urne A".
   $P\,(F) = p\,(F \cap A) + p\,(F \cap B)$ car A et B forment une partition.
   D'où $p\,(F) = p\,(F/A)\,p\,(A) + p\,(F/B)\,p\,(B) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$

   (c) $p\,(A/F) = \dfrac{p\,(A \cap F)}{p\,(F)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$

2. (a) Notons $1_A, 2_A, 1_B, 2_B, 3_B, 4_B$ les six jetons.
   Soit M : "les deux jetons tirés portent le même numéro".
   $p\,(M) = \dfrac{2}{C_6^2} = \dfrac{2}{15}$ car M est réalisé si les jetons tirés sont (1_A et 1_B) ou (2_A et 2_B)

   (b) $(S = 3) = \{(1_A; 2_A)\,; (1_A; 2_B)\,; (2_A; 1_B)\,; (1_B; 2_B)\} \Rightarrow p\,(S = 3) = \dfrac{4}{C_6^2} = \dfrac{4}{15}$
   $(S = 4) = \{(1_A; 3_B)\,; (2_A; 2_B)\,; (1_B; 3_B)\} \Rightarrow p\,(S = 4) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

(c)

x_k	2	3	4	5	6	7
$p(S=x_x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Remarque $\sum p(S=x_k)=1$

(d) $p(S\in\{3;5;7\})=p(S=3)+p(S=5)+p(S=7)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$
$X(\Omega)=\{\lambda;-10\}$
D'après ce qui précède : $p(X=-10)=\frac{3}{5}$ et donc $p(X=\lambda)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$
D'où $E(X)=-10\frac{3}{5}+\lambda\frac{2}{5}$ et donc $E(X)=0\Leftrightarrow\lambda=15$

Exercice 3

1. $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}=\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)^2e^{-i(\alpha+\beta)}=\left(e^{2i\alpha}+2e^{i(\alpha+\beta)}+e^{2i\beta}\right)e^{-i(\alpha+\beta)}$
$=e^{i(\alpha-\beta)}+2+e^{-i(\alpha-\beta)}=2+2\cos(\alpha-\beta)\in\mathbb{R}_+$ car $\forall x\in\mathbb{R}:-1\leqslant\cos x\leqslant1$

2. Posons $S'_n=\sum_{k=1}^n\left(\cos^k\theta\right)(\sin k\theta)$ et $T_n=S_n+iS'_n$
$T_n=\sum_{k=1}^n\left(\cos^k\theta\right)(\cos k\theta+i\sin k\theta)=\sum_{k=1}^n\left(\cos^k\theta\right)e^{ik\theta}$

$$=\sum_{k=1}^n\left((\cos\theta)e^{i\theta}\right)^k=\cos\theta.e^{i\theta}\sum_{k=1}^n\left((\cos\theta)e^{i\theta}\right)^{k-1}$$

Or $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

Donc $\sum_{k=1}^n\left((\cos\theta)e^{i\theta}\right)^{k-1}=\frac{1-\left((\cos\theta)e^{i\theta}\right)^n}{1-(\cos\theta)e^{i\theta}}$

D'où $T_n=(\cos\theta)e^{i\theta}\frac{1-\left((\cos\theta)e^{i\theta}\right)^n}{1-(\cos\theta)e^{i\theta}}=(\cos\theta)e^{i\theta}\frac{1-(\cos^n\theta)e^{in\theta}}{1-(\cos\theta)e^{i\theta}}$

$T_n+\bar{T}_n=(\cos\theta)e^{i\theta}\frac{1-(\cos^n\theta)e^{in\theta}}{1-(\cos\theta)e^{i\theta}}+(\cos\theta)e^{-i\theta}\frac{1-(\cos^n\theta)e^{-in\theta}}{1-(\cos\theta)e^{-i\theta}}$

$$=\cos\theta\frac{e^{i\theta}\left(1-(\cos^n\theta)e^{in\theta}\right)\left(1-(\cos\theta)e^{-i\theta}\right)}{\left(1-(\cos\theta)e^{i\theta}\right)\left(1-(\cos\theta)e^{-i\theta}\right)}+\cos\theta\frac{e^{-i\theta}\left(1-(\cos^n\theta)e^{-in\theta}\right)\left(1-(\cos\theta)e^{i\theta}\right)}{\left(1-(\cos\theta)e^{i\theta}\right)\left(1-(\cos\theta)e^{-i\theta}\right)}$$

$$=\cos\theta\frac{e^{i\theta}\left[1-(\cos\theta)e^{-i\theta}-(\cos^n\theta)e^{in\theta}+\left(\cos^{n+1}\theta\right)e^{i(n-1)\theta}\right]}{1+\cos^2\theta-(\cos\theta)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}$$

$$+\cos\theta\frac{e^{-i\theta}\left[1-(\cos\theta)e^{i\theta}-(\cos^n\theta)e^{-in\theta}+\left(\cos^{n+1}\theta\right)e^{-i(n-1)\theta}\right]}{1+\cos^2\theta-(\cos\theta)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}$$

$$=\cos\theta\frac{e^{i\theta}-\cos\theta-(\cos^n\theta)e^{i(n+1)\theta}+\left(\cos^{n+1}\theta\right)e^{in\theta}}{1+\cos^2\theta-2\cos^2\theta}$$

$$+\cos\theta\frac{e^{-i\theta}-\cos\theta-(\cos^n\theta)e^{-i(n+1)\theta}+\left(\cos^{n+1}\theta\right)e^{-in\theta}}{1+\cos^2\theta-2\cos^2\theta}$$

$$=\cos\theta\frac{\left(\cos^{n+1}\theta\right)(2\cos n\theta)-(\cos^n\theta)(2\cos(n+1)\theta)}{\sin^2\theta}=\cos^{n+1}\theta\frac{2\cos n\theta\cos\theta-2\cos(n+1)\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\cos^{n+1}\theta\frac{2\cos n\theta\cos\theta-2(\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta)}{\sin^2\theta}=\cos^{n+1}\theta\frac{2\sin n\theta\sin\theta}{\sin^2\theta}=2\frac{\sin n\theta\cos^{n+1}\theta}{\sin\theta}$$

Finalement : $S_n=\Re(T_n)=\frac{1}{2}\left(T_n+\bar{T}_n\right)=\frac{\sin n\theta\cos^{n+1}\theta}{\sin\theta}$