



Eléments de réponse devoir 12

Exercice 1

- f est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$.
- Pour $n = 0$ la formule est vérifiée.
 - Si $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$, alors par définition de M_{n+1} et de $f : z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
d'où : $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6})}$. La formule est donc encore vraie à l'ordre $n + 1$.
En résumé si la formule est vraie à l'ordre n , elle est encore vraie à l'ordre $n + 1$.
Donc la formule est vraie pour tout entier naturel n .
- Deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{6} + 2k\pi$, c'est à dire $\frac{5(n-p)}{6} = 2k \Leftrightarrow 5(n-p) = 12k \Leftrightarrow 12 \mid 5(n-p) \Rightarrow 12 \mid (n-p)$ car $12 \wedge 5 = 1$ (théorème de Gauss).
Par conséquent les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $n - p$ est multiple de 12.
- $12 \times 4 - 5 \times 9 = 48 - 45 = 3$. Donc $(4, 9)$ est solution de (E).
Par différence membre à membre de $12x - 5y = 3$ et $12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$, on obtient :
 $12(x - 4) - 5(y - 9) = 0 \Rightarrow 12(x - 4) = 5(y - 9)$.
5 divise $12(x - 4)$, il est premier avec 12 donc il divise $x - 4$. (Gauss)
Donc les solutions de l'équation sont du type $(4 + 5k; 9 + 12k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
 - $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{5n}{6} = 2k \Leftrightarrow 3 + 5n = 12k$.
Les entiers naturels n cherchés sont donc ceux solutions de $3 + 5n = 12k$ c'est à dire de $12k - 5n = 3$, soit, d'après (a), les entiers naturels du type $9 + 12k'$, avec $k' \in \mathbb{Z}$

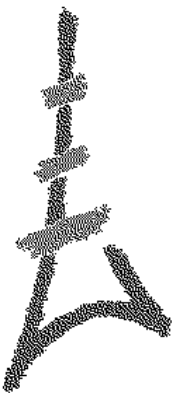
Exercice 2

- Le choix d'une urne étant équiprobable : $p(A) = \frac{1}{2}$
 $p_A(R) = \frac{1}{5}$ et $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$
 - Les événements A et B forment une partition de l'univers, donc (formule des probabilités totales) :
 $p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{13}{30}$
 - $p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$
 - $p_A(R) = \frac{n}{n+4}$ $p_B(R) = \frac{5-n}{7-n}$
 - $p(R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R)$ (formule des probabilités totales)
 $= \frac{1}{2} \times \frac{n}{n+4} + \frac{1}{2} \times \frac{5-n}{7-n} = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}$
 - | | | | | | | |
|--------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $p(R)$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{13}{30}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{13}{28}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{18}$ |

Donc la valeur de n cherchée est 2. L'urne a contient donc 2 boules rouges et l'urne b : 3.

Exercice 3

- $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : -i + \frac{2}{z-i} = \frac{-i(z-i)+2}{z-i} = \frac{-iz-1+2}{z-i} = \frac{1-iz}{z-i} = f(z)$
- $f(z) = -i \Leftrightarrow -i + \frac{2}{z-i} = -i \Leftrightarrow \frac{2}{z-i} = 0$ équation qui n'a pas de solution.



(b) Les antécédents de 0 sont solutions de l'équation $f(z) = 0$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow -i + \frac{2}{z-i} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{z-i} = i \Leftrightarrow 2 = iz + 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{i} = -i$$

donc $(-i)$ est l'unique antécédent de 0. De même :

$$f(z) = i \Leftrightarrow -i + \frac{2}{z-i} = i \Leftrightarrow \frac{2}{z-i} = 2i \Leftrightarrow 1 = iz + 1 \Leftrightarrow z = 0$$

donc 0 est l'unique antécédent de i .

3. (a) Pour $M \neq A$, on a : $AM \times BM' = |z - i| \times |z' + i| = |z - i| \times \left| \frac{2}{z-i} \right| = |z - i| \times \frac{2}{|z-i|} = 2$
- (b) M décrit le cercle de centre A et de rayon 4 équivalent à dire que $AM = 4$. L'égalité de la question précédente entraîne que $BM' = \frac{2}{AM} = \frac{1}{2}$ ce qui prouve que le point M' appartient au cercle C' de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$.
4. (a) En posant $z = x + iy$, on a $z - i = x + i(y - 1)$. Donc $z - i$ est un nombre réel non nul si et seulement si $y = 1$ et $x \neq 0$. Donc l'ensemble E est la droite d'équation $y = 1$ privée du point de coordonnées $(0, 1)$, c'est à dire du point A .
- (b) Lorsque M décrit E , son affixe z s'écrit $x + i$, avec x décrivant \mathbb{R}^* . L'affixe du point M' est dans ce cas : $z' = -i + \frac{2}{z-i} = -i + \frac{2}{x}$
Donc M' appartient à la droite d'équation $y = -1$.
- (c) Lorsque x décrit \mathbb{R}^* , le réel $\frac{2}{x}$ décrit \mathbb{R}^* , ce qui peut facilement se démontrer par l'étude de la fonction $x \rightarrow \frac{2}{x}$ donc le point M' décrit la droite Δ privée du point de coordonnées $(0, -1)$, c'est à dire du point B .
5. $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si :
 $f(z) = -f(\bar{z}) \Leftrightarrow i + \frac{2}{\bar{z}+i} = i - \frac{2}{z-i} \Leftrightarrow \bar{z} + i = -z + i \Leftrightarrow \bar{z} + z = 0$
De plus, comme l'antécédent de 0 par f est $(-i)$, l'ensemble cherché est la droite d'équation $x = 0$ privée du point B et du point A .

Exercice 4

PARTIE A

1. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 e^x - 3x e^x + e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2. (a) $f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = (x^2 - x - 2)e^x = (x - 2)(x + 1)e^x$

(b) tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	\nearrow	\searrow	\nearrow

3. (a) Comme f est dérivable et **positive** sur $[-3; 0]$, I représente l'aire (en unités d'aires) de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C , et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.
- (b) On pose $u(x) = x \quad v'(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = 1 \quad v(x) = e^x$
 $\int_{-3}^0 x e^x dx = [x e^x]_{-3}^0 - \int_{-3}^0 e^x dx = [x e^x]_{-3}^0 - [e^x]_{-3}^0 = 4e^{-3} - 1$
 De même, on pose : $u(x) = x^2 \quad v'(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = 2x \quad v(x) = e^x$
 $\int_{-3}^0 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_{-3}^0 - \int_{-3}^0 2x e^x dx = [x^2 e^x]_{-3}^0 - 2 \int_{-3}^0 x e^x dx = 2 - 17e^{-3}$
- (c) Par linéarité de l'intégrale, on a : $I = \int_{-3}^0 x^2 e^x dx - 3 \int_{-3}^0 x e^x dx + \int_{-3}^0 e^x dx = 6 - 30e^{-3}$

PARTIE B

1. D'après le tableau de variation de g , on sait que $g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$ $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Comme $g'(x) = (2x + a)e^{x^2+ax+b}$

$g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow (3 + a)e^{\frac{9}{4}+\frac{3a}{2}+b} = 0 \Rightarrow a = -3$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow e^{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+b} = e^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow -\frac{9}{4} + b = -\frac{5}{4} \Rightarrow b = 1$

Donc $g(x) = e^{(x^2-3x+1)}$

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R} : h\left(\frac{3}{2} - x\right) = e^{x^2-\frac{5}{4}} = h\left(\frac{3}{2} + x\right) \Rightarrow D$ est axe de symétrie de (Γ) .

(b) La fonction h (dont le tableau de variation est donné à la question 1.) est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[3, 1; 3, 2]$. Donc h est une bijection de $[3, 1; 3, 2]$ sur $[h(3, 1); h(3, 2)]$.

Or $h(3, 1) \simeq 3,7 < 5$ et $h(3, 2) \simeq 5,15 > 5$

Donc l'équation $h(x) = 5$ admet sur $[3, 1; 3, 2]$ une unique solution x_0 telle que $3, 1 < x_0 < 3, 2$

(c) α est un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près se traduit par :

$$|\alpha - 1,7| < 0,5 \Leftrightarrow 1,7 - 0,5 < \alpha < 1,7 + 0,5 \Leftrightarrow 1,2 < \alpha < 2,2$$

Comme $h(1,2) \simeq 0,313$ que $h(2,2) \simeq 0,467$ et que $h\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}} \simeq 0,286$, on peut en utilisant le tableau de variation de h dire que l'image de l'intervalle $]1,2; 2,2[$ est l'intervalle $]e^{-\frac{5}{4}}; h(2,2)[$ et donc que l'on a les inégalités : $0,28 < h(\alpha) < 0,47$

PARTIE C

1. $v'_1(x) = u'(x)e^{u(x)}$ a même signe que $u'(x)$ donc v_1 varie dans le même sens que u .

C'est à dire : v_1 est décroissante sur $]-\infty; a]$ et croissante sur $[a; +\infty[$.

$v'_2(x) = e^x u'(e^x)$ a même signe que $u'(e^x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \in \mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_+^* : u' \leq 0$ sur $]0; a]$ et $u' \geq 0$ sur $[a; +\infty[$

De plus $e^x \in]0; a] \Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln a]$ et $e^x \in [a; +\infty[\Leftrightarrow x \in [\ln a; +\infty[$

Donc $u'(e^x) \leq 0$ sur $]-\infty; \ln a]$ et $u'(e^x) \geq 0$ sur $[\ln a; +\infty[$.

Donc v_2 est décroissante sur $]-\infty; \ln a]$ et croissante sur $[\ln a; +\infty[$

2. $v'_3(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x = [u'(x) + u(x)]e^x$ a même signe que $u'(x) + u(x)$.

D'après le tableau de variation : $u' \geq 0$ sur $[a; +\infty[$ et $u \geq 0$ sur $[b; +\infty[$

Donc u et u' sont positives sur $[b; +\infty[$, d'où $v'_3 \geq 0$ sur $[b; +\infty[$ et v_3 croissante sur $[b; +\infty[$.