Eléments de solution devoir 2

Exercice 1

1. $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=\dfrac{1-z_0^5}{1-z_0}$ (suite géométrique)
   Or $z_0^5=\left(e^{i2\pi/5}\right)^5=e^{i2\pi}=1$ d'où le résultat.
   $\alpha^2+\alpha-1=\left(z_0+z_0^4\right)^2+\left(z_0+z_0^4\right)-1=z_0^2+2z_0^5+z_0^8+z_0+z_0^4-1=1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$
   car $z_0^5=1$ et donc $z_0^8=z_0^3$
   De même : $\beta^2+\beta-1=\left(z_0^2+z_0^3\right)^2+\left(z_0^2+z_0^3\right)-1=z_0^4+2z_0^5+z_0^6+z_0^2+z_0^3-1=1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$
   car $z_0^5=1$ et donc $z_0^6=z_0$.

2. $\alpha=e^{i2\pi/5}+\left(e^{i2\pi/5}\right)^4=e^{i2\pi/5}+e^{i8\pi/5}=e^{i\pi}\left(e^{-i3\pi/5}+e^{i3\pi/5}\right)$
   $=-2\cos\dfrac{3\pi}{5}=-2\cos\left(\pi-\dfrac{2\pi}{5}\right)=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$

3. les solutions de $z^2+z-1=0$ sont $z_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$ et $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$
   Parmi ces solutions figure α. Or $\dfrac{2\pi}{5}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos\dfrac{2\pi}{5}\geqslant 0\Rightarrow\alpha\geqslant 0$
   Donc $\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$ d'où $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Exercice 2

1. $Z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{-1-\sqrt{3}+2i}{2+i\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}+2i\right)\left(2-i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)}{\left(2+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)\left(2-i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)}=\dfrac{2i\sqrt{3}+8i}{8+2\sqrt{3}}=i$
   Donc $|Z|=1$ et $\arg Z=\dfrac{\pi}{2}$
   On en déduit $\dfrac{BC}{AB}=1$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
   Le triangle ABC est donc rectangle isocèle de sommet B.

2. $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ d'une part et
   $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}}=\sqrt{2}e^{-i11\pi/12}$ d'autre part.
   D'où $\sqrt{2}\cos\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $-\sqrt{2}\sin\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$
   Or $\cos\dfrac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}$
   on en déduit : $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Exercice 3

1. $Z=\dfrac{z-1}{\overline{z-1}}\Rightarrow|Z|=\dfrac{|z-1|}{\left|\overline{z-1}\right|}=\dfrac{|z-1|}{|z-1|}=1$

2. $Z=\dfrac{x-1+iy}{x-1-iy}=\dfrac{(x-1+iy)^2}{(x-1-iy)(x-1+iy)}=\dfrac{(x-1)^2-y^2+2iy(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$
   D'où $\operatorname{Re}(Z)=\dfrac{(x-1)^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$ et $\operatorname{Im}(Z)=\dfrac{2y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

3. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = 1$ (mais pas $x = 1$ **et** $y = 0$).
   L'ensemble cherché est donc la réunion des deux droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$ privée de leur point d'intersection.

Exercice 4 *Remarquer qu'il faut* $z \neq -1$

1. (a) $f(G)$ a pour affixe $Z = i\dfrac{-1+i-i}{-1+i+1} = i\dfrac{-1}{i} = -1$. Donc $f(G) = A$

   (b) $f(M) = O \Leftrightarrow i\dfrac{z-i}{z+1} = 0 \Leftrightarrow z = i$. Donc $M = B$.

2. Z imaginaire pur si et seulement si $\dfrac{z-i}{z+1}$ est réel.
   $$\frac{z-i}{z+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+1+iy} = \frac{(x+i(y-1))(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{x(x+1)+y(y-1)+i[(x+1)(y-1)-xy]}{(x+1)^2+y^2}$$
   Donc $\dfrac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+1)(y-1) - xy = 0 \Leftrightarrow -x+y-1 = 0$
   L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $-x+y-1=0$ privée du point $(-1;0)$ *(cf remarque au début de l'exercice)*