Eléments de solution

Solution 1 **1.** On a $10 \equiv -1\ [11]$. On en déduit le résultat car $(-1)^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$

2. Soit $N = \overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0} = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n$
D'après **1.** $N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\ [11]$
Donc $N \equiv (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)\ [11]$
Le membre de gauche est congru à 0 si et seulement si le membre de droite l'est. D'où le critère.

Solution 2 $\cos\theta$ est la partie réelle de $e^{i\theta}$. Calculons donc $T = \sum\limits_{k=0}^{7} e^{i(2k+1)\pi/17}$ puis déterminons en la partie réelle.

$T = \sum\limits_{k=0}^{7} e^{i(2k+1)\pi/7} = e^{i\pi/17} + e^{i3\pi/17} + \cdots + e^{i15\pi/17} = e^{i\pi/17}\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^7\right)$ avec $q = e^{i2\pi/17}$

Donc $T = e^{i\pi/17}\dfrac{1-q^8}{1-q} = e^{i\pi/17}\dfrac{1-e^{i16\pi/17}}{1-e^{i2\pi/17}} = e^{i\pi/17}\dfrac{e^{i8\pi/17}\left(e^{-i8\pi/17} - e^{i8\pi/17}\right)}{e^{i\pi/17}\left(e^{-i\pi/17} - e^{i\pi/17}\right)} = e^{i8\pi/17}\dfrac{-2\sin\dfrac{8\pi}{17}}{-2\sin\dfrac{\pi}{17}}$

La partie réelle de T (c'est S !!!) est donc $\dfrac{\cos\dfrac{8\pi}{17}\sin\dfrac{8\pi}{17}}{\sin\dfrac{\pi}{17}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{16\pi}{17}}{\sin\dfrac{\pi}{17}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{17}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{17}} = \dfrac{1}{2}$

Solution 3 **1.** $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme, produit, quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $f'(x) = 9\sqrt{x} - 6x - 2$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\sqrt{x} - 3x^2 - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(6\sqrt{x} - 3x - 2) = -2$
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$

3. On a (comme dans **1.**) f' dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $f''(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{x}} - 6 = \dfrac{9 - 12\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\sqrt{x} - 6x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9}{\sqrt{x}} - 6\right) = +\infty$
Donc f' n'est pas dérivable en 0.

5. $f''(x)$ a même signe que $9 - 12\sqrt{x}$.
Avec $9 - 12\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 0 \le x < \dfrac{9}{16}$

D'où le tableau de variations

x	0		$\frac{9}{16}$		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$		0		-6
$f'(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{11}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

6. f' est dérivable et strictement croissante sur $\left[0; \dfrac{9}{16}\right]$. Donc f' est une bijection de $\left[0; \dfrac{9}{16}\right]$ sur $\left[f'(0); f'\left(\dfrac{9}{16}\right)\right]$.

Comme $0 \in \left[f'(0); f'\left(\dfrac{9}{16}\right)\right]$, il existe α unique tel que $f'(\alpha) = 0$.

$f(4) = -8 < 0$. Donc, d'après les variations de f' l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[4; +\infty[$

f' est dérivable et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{9}{16}; 4\right]$.

Donc f' est une bijection de $\left[\dfrac{9}{16}; 4\right]$ sur $\left[f'(4); f'\left(\dfrac{9}{16}\right)\right]$.

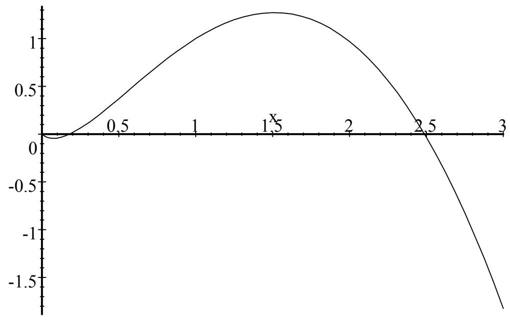
Comme $0 \in \left[f'(4)\,;f'\left(\frac{9}{16}\right)\right]$, il existe β unique tel que $f'(\beta) = 0$

7. $f(x) = x^2\left(-3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = -3$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

x	0		α		β		$+\infty$
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

8. α et β sont les solutions de l'équation $9\sqrt{x} - 6x - 2 = 0$ avec $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\alpha < \beta$.
En posant $t = \sqrt{x}$ cherchons les solutions de $9t - 6t^2 - 2 = 0$.
On trouve $t_1 = \frac{9-\sqrt{33}}{12}$ et $t_2 = \frac{9+\sqrt{33}}{12}$
On a $0 < \frac{9-\sqrt{33}}{12} < \frac{9+\sqrt{33}}{12}$ donc $\alpha = \left(\frac{9-\sqrt{33}}{12}\right)^2$ et $\beta = \left(\frac{9+\sqrt{33}}{12}\right)^2$

9.



Solution 4

1.Le point de coordonnées $(a, f(a))$ est un point de $\mathcal{C}$ donc son symétrique par la symétrie de centre A est aussi un point de $\mathcal{C}$. Or, le symétrique du point de coordonnées $(a, f(a))$ est le point de coordonnées $(a, 2b - f(a))$. Ce point appartenant à $\mathcal{C}$: $f(a) = 2b - f(a)$.
On en déduit $f(a) = b$. Donc $A \in \mathcal{C}$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

3. Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = a - x \\ y' - b = b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

4. g est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D}$ et $g(-x) = f(a + x) - b$.
Le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ a pour symétrique le point $M'(2a - x, 2b - f(x))$.
Comme $M' \in \mathcal{C}$: $f(2a - x) = 2b - f(x)$.
Cette formule est vraie pour tout x réel. D'où : $f(2a - (x + a)) = 2b - f(x + a)$.
Donc $f(a - x) = 2b - f(a + x)$ ce qui peut s'écrire $f(a - x) - b = b - f(a + x)$ ou encore $g(x) = -g(-x)$.

5. Soit $M(x, y) \in \mathcal{C}$. Son image M' par la symétrie de centre A est $M'(x' = 2a - x, y' = 2b - y)$.
L'image de M' par la symétrie de centre B est $M''(x'' = 2c - x' = x + 2(c - a), y'' = 2b - y' = y)$.
$M'' \in \mathcal{C} \Rightarrow y = f(x + 2(c - a))$ et comme $M \in \mathcal{C}$: $y = f(x)$.
Donc, pour tout x réel : $f(x + 2(c - a)) = f(x)$
Donc f a pour période $2(c - a)$.