Eléments de solution

Solution 1 $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+4) = (x+4-E(x+4)) \sin \dfrac{\pi(x+4)}{2}$

Or, par définition de $E(x)$: $E(x) \leq x < E(x)+1$
Donc $E(x)+4 \leq x+4 < E(x)+5$ d'où $E(x+4) = E(x)+4$.
On en déduit $f(x+4) = (x+4-E(x)-4) \sin\left(\dfrac{\pi x}{2} + 2\pi\right) = (x-E(x)) \sin \dfrac{\pi x}{2} = f(x)$

Solution 2 **1.** f fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-x^2-2\lambda x+1}{(x^2+1)^2}$

2. **(a).** $f'(x)$ a même signe que $-x^2-2\lambda x+1$ trinôme du second degré ayant pour racines $a = -\lambda - \sqrt{1+\lambda^2}$ et $b = -\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}$
D'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(b). $f(a) = f\left(-\lambda - \sqrt{1+\lambda^2}\right) = \dfrac{-\lambda - \sqrt{1+\lambda^2} + \lambda}{\left(-\lambda - \sqrt{1+\lambda^2}\right)^2 + 1} = \dfrac{-1}{2\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \dfrac{1}{2a}$

$f(b) = f\left(-\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right) = \dfrac{-\lambda + \sqrt{1+\lambda^2} + \lambda}{\left(-\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)^2 + 1} = \dfrac{1}{2\left(-\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)} = \dfrac{1}{2b}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \dfrac{x}{x^2} \dfrac{1+\dfrac{\lambda}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ permet d'écrire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2a}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2b}$	$\searrow$	0

4. **(a)** $m_\lambda = \dfrac{1}{2a} = \dfrac{-1}{2\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)}$ et $M_\lambda = \dfrac{1}{2b} = \dfrac{1}{2\left(-\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)}$

(b) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} m_\lambda = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} M_\lambda = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}}{2} = +\infty$

Solution 3 **1.** $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{a_1; a_2; \cdots; a_n\}$

2. Sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ f est dérivable et : $f'(x) = -\left[\dfrac{1}{(x-a_1)^2} + \dfrac{1}{(x-a_2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(x-a_n)^2}\right]$

3. $\forall x \in \mathcal{D} : f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}$.
Attention à ne pas écrire que f est strictement décroissante sur $\mathcal{D}$.

x	$-\infty$		a_1		a_2	$\cdots\cdots\cdots$	a_n		$+\infty$
$f'(x)$			$\Vert$		$\Vert$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Vert$		
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	0

4. Le théorème de la bijection (si f est dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I ...) conduit à :

- l'équation $f(x) = 0$ possède $n-1$ solutions dans $\mathbb{R}$ (une dans $]a_1; a_2[$, une dans $]a_2; a_3[$, ..., une dans $]a_{n-1}; a_n[$)
- si $\lambda \neq 0$, l'équation $f(x) = \lambda$ possède n solutions dans $\mathbb{R}$ (examiner $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$)

Solution 4 **1.** $\Delta = (-2\sin 2\alpha)^2 - 8(1+\cos 2\alpha) = -4\left(\sin^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 2\right) = -4(1+\cos 2\alpha)^2$

D'où les solutions : $z_1 = \sin 2\alpha - i\left(1+\cos 2\alpha\right)$ et $z_2 = \sin 2\alpha + i\left(1+\cos 2\alpha\right)$
2. $z_1 = -i - i\left(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\right) = -i\left(1+e^{i2\alpha}\right) = -ie^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right) = -2i\left(\cos\alpha\right)e^{i\alpha} = 2\left(\cos\alpha\right)e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$
Si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\alpha > 0$ d'où $|z_1| = 2\cos\alpha$ et $\arg\left(z_1\right) = \alpha - \frac{\pi}{2}$
Si $\alpha \notin \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\alpha < 0$ d'où $|z_1| = -2\cos\alpha$ et $z_1 = \left(-2\cos\alpha\right)e^{i\pi}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \left(-2\cos\alpha\right)e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$
Donc $\arg\left(z_1\right) = \alpha + \frac{\pi}{2}$
De plus $z_2 = \bar{z}_1 \Rightarrow |z_2| = |z_1|$ et $\arg\left(z_2\right) = -\arg\left(z_1\right)$.
Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ou si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $z_1 = z_2 = 0$.
3. Les deux racines sont égales lorsque $\Delta = 0$ donc lorsque $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Solution 5 **1.** En posant $z = x+iy : z - i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (x-y) + i(y-x) = 0 \Leftrightarrow y = x$

L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $y = x$.
2. f est définie pour tous les complexes z tels que le dénominateur $z - i\bar{z}$ ne s'annule pas.
D'après **1.** f est donc définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{A}$ où $\mathbb{A} = \left\{x+iy \;/\; x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, y = x\right\}$.
3. $f\left(i\right) = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow f\left(i\right)^4 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4;3\pi\right] = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}$

Solution 6 **1.** $r_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0$

2. $\theta_n = \theta_0 + n\frac{2\pi}{3}$
3. $z_0z_1z_2 = 8 \Rightarrow |z_0z_1z_2| = 8$ et $\arg\left(z_0z_1z_2\right) = 0\ \ [2\pi]$.
Donc $r_0r_1r_2 = 8$ et $\theta_0+\theta_1+\theta_2 = 0\ [2\pi]$ d'où $r_0\left(\frac{2}{3}r_0\right)\left(\frac{4}{9}r_0\right) = 8$ et $\theta_0 + \left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right) = 0\ \ [2\pi]$.
Donc $r_0 = 3$ et $\theta_0 = 0\ \ [2\pi] = 0$ car $\theta_0 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. D'où $\theta_n = n\frac{2\pi}{3}$
On en déduit $r_1 = 2,\ r_2 = \frac{4}{3}$ et $\theta_1 = \frac{2\pi}{3},\ \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$
4. **(a)** $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = |z_{n+1}-z_n| = \left|r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} - r_ne^{i\theta_n}\right| = \left|\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}r_0e^{i(n+1)\frac{2\pi}{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0e^{in\frac{2\pi}{3}}\right|$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0\left|e^{in\frac{2\pi}{3}}\right|\left|\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}-1\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n 3\left|\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}-1\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n 3\left|-\frac{4}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n 3\sqrt{\frac{19}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{19}$
(b) $I_n = \sqrt{19}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \sqrt{19}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3\sqrt{19}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$
(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 3\sqrt{19}$

Solution 7 **1.** Supposons n non premier. Alors $n = pq$ avec p et q entiers strictement compris entre 1 et n.

D'où $A_n = 2^{pq}-1 = \dfrac{2^{pq}-1}{2^q-1}\dfrac{2^q-1}{2-1}$
Ces deux facteurs sont entiers (sommes de termes de suites géométriques à termes entiers).
A_n étant premier, l'un des facteurs vaut obligatoirement 1. D'où $p = 1$ ou $q = 1$. Faux.
Donc n est premier.
2. $B_n = 1+10+10^2+10^3+\cdots+10^{n-1} = \frac{1-10^n}{1-10}$
Si n n'est pas premier, $n = pq$ avec p et q entiers strictement compris entre 1 et n.
Alors $B_n = \dfrac{10^{pq}-1}{10-1} = \dfrac{10^{pq}-1}{10^p-1}\dfrac{10^p-1}{10-1}$
Ces deux facteurs sont entiers (sommes de termes de suites géométriques à termes entiers).
B_n étant premier, l'un des facteurs vaut obligatoirement 1. D'où $p = 1$ ou $q = 1$. Faux.
Donc n est premier.
3. **(a)** $p = 4q + r$ avec $0 \le r < 4$.
$r = 0 \Rightarrow p = 4q$ n'est pas possible
$r = 1 \Rightarrow p = 4q+1$ est possible (avec $p = 5$ ou $p = 13$ par exemple)
$r = 2 \Rightarrow p = 4q+2 = 2\left(2q+1\right)$ n'est possible que si $2q+1 = 1$ et donc $p = 2$.
$r = 3 \Rightarrow p = 4q+3$ est possible (avec $p = 7$ ou $p = 11$ par exemple)
(b) $p = 6q + r$ avec $0 \le r < 6$
$r = 0 \Rightarrow p = 6q$ n'est pas possible
$r = 1 \Rightarrow p = 6q+1$ est possible (par exemple $p = 7$, $p = 13, \ldots$)
$r = 2 \Rightarrow p = 6q+2 = 2\left(3q+1\right)$ n'est possible que si $3q+1 = 1$ et donc $p = 2$.
$r = 3 \Rightarrow p = 6q+3 = 3\left(2q+1\right)$ n'est possible que si $2q+1 = 1$ et donc $p = 3$
$r = 4 \Rightarrow p = 6q+4 = 2\left(3q+2\right)$ n'est possible que si $3q+2 = 1$ ce qui est impossible $\left(q\in\mathbb{N}^*\right)$
$r = 5 \Rightarrow p = 6q+5$ est possible (par exemple $p = 11$, $p = 17, \ldots$)

(c) Si $p \geq 5$ les restes possibles dans la division par 4 sont 1 et 3 et ceux possibles dans la division par 6 : 1 et 5.

- $p = 6n + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 36n^2 + 12n = 12n\,(3n + 1)$.
  - Si n est pair, $n = 2k \Rightarrow p^2 - 1 = 24k\,(6k + 1)$
  - Si n est impair $n = 2k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 12\,(2k + 1)\,(6k + 4) = 24\,(2k + 1)\,(3k + 1)$
- $p = 6n + 5 \Rightarrow p^2 - 1 = 36n^2 + 60n + 24 = 12\left(3n^2 + 5n + 2\right) = 12\,(n + 1)\,(3n + 2)$
  - Si n est pair, $n = 2k \Rightarrow p^2 - 1 = 12\,(2k + 1)\,(6k + 2) = 24\,(2k + 1)\,(3k + 1)$
  - Si n est impair $n = 2k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 12\,(2k)\,(6k + 5) = 24k\,(6k + 5)$

Dans tous les cas : $p^2 - 1$ est divisible par 24.
4. $p = (m + n)\,(m - n)$ et p premier. Donc $m + n = 1$ ou $m - n = 1$.
$m + n = 1 \Rightarrow n = 1 - m \Rightarrow p = (m + n)\,(m - n) = 1 \times (m - (1 - m)) = 2m - 1 \Rightarrow m = \frac{p+1}{2}$
$m - n = 1 \Rightarrow n = m - 1 \Rightarrow p = (m + n)\,(m - n) = (m + m - 1) \times 1 = 2m - 1 \Rightarrow m = \frac{p+1}{2}$
Dans tous les cas : $m = \frac{p+1}{2}$
Alors, $n = 1 - m = \frac{1-p}{2} = -\frac{p-1}{2}$ ou $n = m - 1 = \frac{p-1}{2}$
Recherchant les solutions entières naturelles : $m = \frac{p+1}{2}$ et $n = \frac{p-1}{2}$