

## Eléments de solution

**Solution 1 1.**  $x \mapsto 1 + x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $]1; +\infty[$ .

$x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de ces deux fonctions et admet donc des primitives sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à conclure en indiquant que parmi les primitives d'une fonction sur un intervalle, il en existe une et une seule qui prend en un point donné une valeur donnée. (voir cours).

**2.** Sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée de  $x \mapsto F(x) + F(-x)$  est  $x \mapsto F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ .

Donc la fonction  $x \mapsto F(x) + F(-x)$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) + F(-x) = F(0) + F(0) = 0$  soit  $F(-x) = F(x)$ . Donc  $F$  est impaire.

**3.**  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(\frac{1}{x}) = f(x) - \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$

Donc  $G$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = G(1) = F(1) + F(1) = 2F(1)$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + F(\frac{1}{x})]$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(0) = 0$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1)$ .

**4. (a)**  $x \mapsto \tan x$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  et  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $H$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : H'(x) = (\tan x)' F'(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$ .

**(b)** De (a) on déduit que  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : H(x) = x + C$

$H(0) = F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$  et donc  $H(x) = x$

**5.**  $H(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$  et  $H(\frac{\pi}{4}) = F(\tan \frac{\pi}{4}) = F(1)$  d'où  $F(1) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1) = \frac{\pi}{2}$

**Solution 2 1.**  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

**2.** En utilisant par exemple la méthode des coefficients indéterminés, on trouve  $a = 2$  et  $b = 1$ .

**3.**  $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$  d'où, en désignant par  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  :

$F(x) = -\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \lambda$  où  $\lambda$  est une constante quelconque.

**Solution 3 1.**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

**2.** Soit  $P$  un polynôme de degré 2 et strictement positif sur  $\mathbb{R}$ .

Alors  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $\Delta < 0$  et  $a < 0$  (théorème signe du trinôme).

$\varphi(x) = \sqrt{P(x)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi'(x) = \frac{P'(x)}{2\sqrt{P(x)}} = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2a+\frac{b}{x})}{2x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}} = \sqrt{a}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

On n peut donc avoir  $\varphi' = f$ . Donc  $\varphi$  ne peut être primitive de  $f$ .

**3.**  $h'(x) = g'(x)\sqrt{1+2x^2} + g(x) \frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}} = \frac{(1+2x^2)g'(x)+2xg(x)}{\sqrt{1+2x^2}}$

**4.** En posant  $g(x) = x$  on obtient  $h'(x) = f(x)$ . D'où une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R} : F(x) = x\sqrt{1+2x^2}$