Eléments de solution

Solution 1

1. $\frac{1-u}{1+u}=\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)}=\frac{2i\sin\theta/2}{2\cos\theta/2}=-i\tan\frac{\theta}{2}$

D'où $\left|\frac{1-u}{1+u}\right|=\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$ et $\arg\frac{1-u}{1+u}=\arg(-i)+\arg\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+0 \text{ si } \tan\frac{\theta}{2}>0\\ -\frac{\pi}{2}-\pi \text{ si } \tan\frac{\theta}{2}<0\end{cases}$

$\frac{2+iz}{2-iz}=u\Leftrightarrow 2+iz=u(2-iz)\Leftrightarrow iz(1+u)=2(u-1)\Leftrightarrow z=2i\frac{1-u}{1+u}=2\tan\frac{\theta}{2}$

D'où $|z|=2\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$ et $\arg z=\begin{cases}0 \text{ si } \tan\frac{\theta}{2}>0\\ \pi \text{ si } \tan\frac{\theta}{2}<0\end{cases}$

2. En posant $u=\frac{2+iz}{2-iz}$ l'équation s'écrit $u^5=1$. Solution : $u=e^{i2k\pi/5}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'où $z=2\tan\frac{k\pi}{5}$ d'après **1.**

Solution 2

1. $\frac{2z-1}{z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)}=\frac{2z-1}{z^2}\Leftrightarrow\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}^2}=\frac{2z-1}{z^2}\Leftrightarrow(z-\bar{z})\left(2z\bar{z}-(z+\bar{z})\right)=0$

2. $2z\bar{z}=z+\bar{z}\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)=2x\Rightarrow x^2-x+y^2=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

3.$2z\bar{z}=z+\bar{z}\Rightarrow 2|z|^2=2\operatorname{Re}(z)\Rightarrow 2|z|^2=2|z|\cos\theta\Rightarrow|z|=\cos\theta$ car $z\neq 0$

$\frac{2z-1}{z^2}=\frac{\bar{z}(2z-1)}{\bar{z}z^2}=\frac{2z\bar{z}-\bar{z}}{\bar{z}z^2}=\frac{z+\bar{z}-\bar{z}}{\bar{z}z^2}=\frac{z}{\bar{z}z^2}=\frac{1}{z\bar{z}}=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

Solution 3

1. f est définie si $\frac{1+x}{1-x}>0$ d'où $\mathcal{D}=\left]-1;1\right[$

Sur $\mathcal{D}$ on a $1+x>0$ et $1-x>0$ donc $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$

$\forall x\in\mathcal{D}:-x\in\mathcal{D}$ et $f(-x)=\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]=-f(x)$. Donc f est impaire.

2.f est dérivable sur $\left]-1;1\right[$ et$\forall x\in\left]-1;1\right[:f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}$

On pose $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{t\to0}\ln t=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

L'abscisse x de A vérifie $f(x)=1\Leftrightarrow\ln\frac{1+x}{1-x}=2\Leftrightarrow\frac{1+x}{1-x}=e^2\Leftrightarrow x=\frac{-1+e^2}{1+e^2}.=.76159$

3.Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$ donc il existe $a\in\left]-1;1\right[$ tel que $f(a)<\lambda$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$ donc il existe $b\in\left]-1;1\right[$ tel que $f(b)>\lambda$

f est dérivable et strictement croissante sur $[a;b]$ donc f est une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$.

Il existe donc α unique dans $[a;b]$ tel que $f(\alpha)=\lambda$.

D'après les variations de f l'équation $f(x)=\lambda$ n'a pas de solution dans $\left]-1;a\right[$ et dans $\left]b;1\right[$.

Finalement, l'équation $f(x) = \lambda$ possède une et une seule solution dans $]-1;1[$
f est donc une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$, donc admet unefonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ prenant ses valeurs dans $]-1;1[$ de même sens de variation que f (donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$) et dont la représentation graphique est, dans un repère orthonormal, symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
B est le symétrique du point A. L'ordonnée de B est l'abscisse de A. Donc B a pour ordonnée $\frac{-1+e^2}{1+e^2}$

4.a $\left\{\begin{array}{c} y = f(x) \\ x \in]-1;1[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2y = \ln\frac{1+x}{1-x} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+x = (1-x)\,e^{2y} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\left(1+e^{2y}\right) = e^{2y} - 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \frac{e^{2y}-1}{1+e^{2y}} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

f^{-1} est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1$
b. $G(x) = \ln\left(e^{2x}+1\right) - x$
f^{-1} étant positive sur $[0;1]$ car $f^{-1}(0) = 0$ et f^{-1} strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'aire vaut :
$\mathcal{A} = \int_0^1 f^{-1}(x)\,dx = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \ln\left(1+e^2\right) - 1$
Résultat en unités d'aires, celle-ci valant $5 \times 5 = 25$ cm^2.
c.Pour des raisons de symétrie, l'aire cherchée est le double de l'aire délimitée par l'arc OB, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $y = x$.
L'aire délimitée par l'arc OB, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $y = x$ est égale à l'aire du triangle OIK où $I(1;0)$ et $K(1;1)$ diminuée de $\mathcal{A}$ soit : $\frac{1}{2} - \mathcal{A} = \frac{1}{2} + \ln\left(1+e^2\right)$.
L'aire cherchée vaut donc $1 + 2\ln\left(1+e^2\right)$ unités d'aire