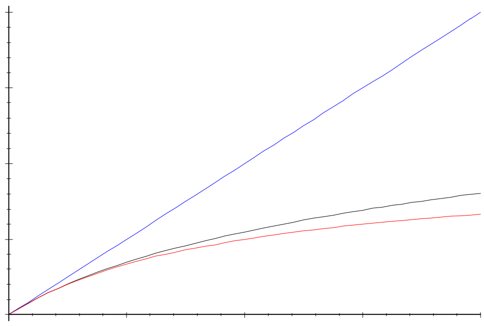
Eléments de solution

1 Sujet National 1998 Série S

1.1 Partie A

1. $h'(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} \geqslant 0$, donc h est croissante sur $[0; +\infty[$ et $h(0) = 0$.
2. On en déduit que pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \geqslant 0$, d'où l'inégalité $\dfrac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x)$
3. C et Γ admettent en O une même tangente D d'équation $y = x$.



1.2 Partie B

1. Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f_1'(x) = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$, donc f_1 est décroissante sur cet intervalle.
2. $f_1(x) = (x+1)\left(\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} - \dfrac{x}{1+x}\right)$.
   Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$. De plus, $f_1(0) = 0$.
3. $\forall x \geqslant 0 : f_1(x) \leqslant 0$, d'où $\ln(1+x) \leqslant x$
4. Remarquons que si $k \geqslant 1$, alors $x \leqslant kx$. L'inégalité précédente fournit alors le résultat.
5. $f_k'(x) = \dfrac{1-k-kx}{1+x}$. $\quad f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-k-kx = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1-k}{k}$ $(k \neq 0)$
   Le signe de $f_k'(x)$ est celui de $(1-k-kx)$ car $1+x > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction affine change de signe pour $\dfrac{1-k}{k}$, qui appartient à $\mathbb{R}_+$. La fonction f_k est donc strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1-k}{k}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1-k}{k}, +\infty\right[$. On remarque alors que $f_k\left(\dfrac{1-k}{k}\right) > 0$ d'après la stricte croissance de la fonction f_k sur $\left[0, \dfrac{1-k}{k}\right]$, ce qui prouve que dans ce cas l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant kx$ n'est pas toujours vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}_+$.
6. Les valeurs de k strictement positives telles que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$ appartiennent donc à l'intervalle $[1, +\infty[$ d'après les questions précédentes.

1.3 Partie C

1. On obtient successivement : $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)dx. = 2\ln 2 - 1$, $J = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x))\,dx = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}\right) dx = -2\ln 2 - 3 + 4\ln 3$
   La justification demandée est évidente car $\dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{(2x+4)-4}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$
   Comme la droite D est située au-dessus de la courbe C, J est l'aire comprise entre C, D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. De même, K est l'aire comprise entre C, Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. (a) Une fonction continue en un point a est une fonction définie en a et telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
   Une fonction continue sur un intervalle I est une fonction continue en tout point de I.
   Les fonctions usuelles (polynômes, fractions rationnelles, trigonométriques, logartihme et exponentielle) sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
   u est continue sur $]0;1]$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 = u(0)$ donc u est continue en 0, donc continue sur $[0;1]$.

   (b) D'après la partie A, pour tout x de $]0;+\infty[$: $\dfrac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \Longrightarrow \dfrac{2}{x+2} \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{2}{x+2} \leqslant u(x) \leqslant 1$
   Cette inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $u(0) = 1$.
   Donc pour tout x de $[0;1]$, on a : $\dfrac{2}{x+2} \leqslant u(x) \leqslant 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2}{x+2}dx \leqslant \int_0^1 u(x)\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx$ car $0 \leqslant 1$.
   On en déduit l'encadrement cherché. Le calcul des intégrales donne $2\ln 3 - 2\ln 2 \leqslant L \leqslant 1$.
   Une valeur approchée de L à 10^{-1} près est donc par exemple $0,9$.

2 Amérique du Nord 1998 Série S

2.1 PARTIE A

I Etude des fonctions f_n

1. $f_n'(x) = \dfrac{n - 2 - 2n\ln x}{x^3}$. Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(n - 2 - 2n\ln x)$ car $x^3 > 0$ sur $]0,+\infty[$.

2. $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{n-2}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}$. Remarquons que cette valeur est strictement positive, donc elle appartient au domaine de définition de f_n.
   Sur $\left]0, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$, $\ln x < \dfrac{n-2}{2n}$, donc $f_n'(x) > 0$, donc f_n est strictement croissante.
   De même, f_n est strictement décroissante sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty\right[$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2} + n\dfrac{\ln x}{x^2}$.

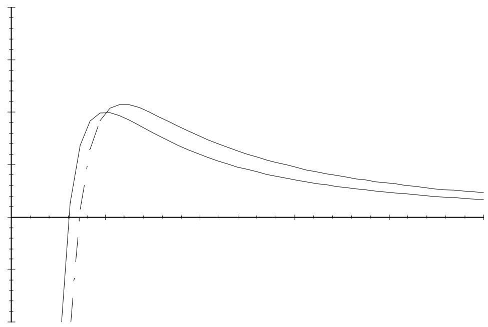
4.

x	0		$e^{\frac{n-2}{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2}e^{\frac{2-n}{2}}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)(1 + n\ln x) = -\infty.$

II Représentations graphiques

1. C_2 est en trait plein, et C_3 en pointillés.



2. (a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Cette différence est indépendante de n.

   (b) On a $f_4(x) - f_3(x) = f_3(x) - f_2(x)$, donc $f_3(x) = \dfrac{f_2(x) + f_4(x)}{2}$. On appelle M_2, M_3 et M_4 les points de C_2, C_3 et C_4 d'abscisses x. M_3 est donc le milieu de $[M_2M_4]$, ce qui prouve que l'on obtient M_4 comme symétrique de M_2 par rapport à M_3.

2.2 PARTIE B

1. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - 2e^{-1}$

2. Sur $[1, e]$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \geqslant 0$, donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$, donc C_{n+1} est située au-dessus de C_n, donc l'aire cherchée est égale en unités d'aire à $A = \displaystyle\int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x))\, dx = I = 1 - 2e^{-1} u.a$

3. (a) La fonction f_2 est dérivable et positive sur $[1, e]$, donc l'aire cherchée est égale à $A_2 = \displaystyle\int_1^e f_2(x)\, dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e + 2I = 3 - 5e^{-1}$

   (b) De manière générale, on a de même $A_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)\, dx$ d'où $A_{n+1} - A_n = A$ pour tout $n \geqslant 2$. On a donc démontré que la suite (A_n) est arithmétique de raison A, dont la question 2) a fourni une interprétation géométrique.

2.3 PARTIE C

1. (a) Pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{n-2}{2n} > 0$, donc $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$. Comme f_n est croissante sur $\left[1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$, on a donc $f_n(1) < f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)$. Comme $f_n(1) = 1$, on en déduit le résultat.

   (b) f_n est strictement croissante sur $\left[1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$, et $f_n(1) = 1$, donc $f_n(x) > 1$ sur $\left]1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$, ce qui prouve que l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut pas avoir de solution sur cet intervalle.

2. La fonction f_n est dérivable et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty\right[$. Elle définit donc une bijection de cet intervalle sur $\left]0, f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)\right]$. Comme $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$, il existe α_n unique solution de $f_n(x) = 1$ sur cet intervalle.

3. (a) $f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln n}{2}$, car $\ln \sqrt{n} = \dfrac{\ln n}{2}$. Si $n > e^2$, alors $\dfrac{\ln n}{2} > \dfrac{\ln e^2}{2} = 1$, et donc $f_n(\sqrt{n}) > 1$, puisque $\dfrac{1}{n} > 0$.

   (b) Si $n \geqslant 8$, alors $n > e^2$, puisque $e^2 \simeq 7.39$, donc $f_n(\sqrt{n}) > 1$, ce qui implique que $\alpha_n > \sqrt{n}$, car f_n est strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$$