

Éléments de solution

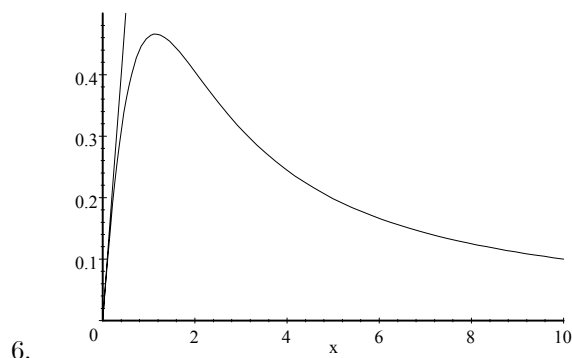
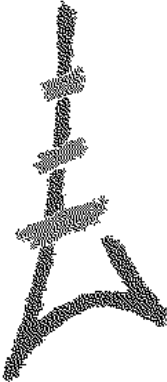
1 Solution exercice 1

1.1 Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

- $g'(x) = 1 - e^x < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.
De plus, pour $x \neq 0$: $g(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$ qui contient 0, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $[0; +\infty[$.
 - Comme $g(1,14) \simeq 1,3232 \times 10^{-2} > 0$ et $g(1,15) \simeq -8,1929 \times 10^{-3} < 0$, on a $1,14 < \alpha < 1,15$.
- D'après le tableau de variations de g , $g(x) > 0$ pour $x \in [0, \alpha[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha, +\infty[$.

1.2 Partie B - Étude de la fonction f et tracé de la courbe C

- $\forall x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = e^x \frac{x+2-e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$
 - $f'(x)$ a même signe que $g(x)$. Donc f est croissante sur $[0, \alpha[$ et décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$: $\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \frac{e^x-1}{xe^x+1} = f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y = 0$.
- $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$
D'où $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$
 - On en déduit : $1,14 < \alpha < 1,15 \Rightarrow \frac{1}{1,15 + 1} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{1,14 + 1} \Rightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$
- $y = x$.
- $\forall x \in [0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)(-xe^x + e^x - 1)}{xe^x + 1}$
 - $\forall x \in [0; +\infty[$: $u'(x) = -xe^x < 0$, donc u est décroissante sur $[0; +\infty[$.
 $u(0) = 0 \Rightarrow u(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$.
 - Sur $[0; +\infty[$, $f(x) - x$ a même signe que $u(x)$, donc C est en dessous de la droite (T).



6.

1.3 Partie C - Calcul d'aire et étude d'une suite

1. $\forall x \in [0; +\infty[: F(x) = \ln(x + e^x)$

2. Puisque la courbe \mathcal{C} est située au-dessous de la tangente (T) :

$$A = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - [F(x)]_0^1 = \frac{3}{2} - \ln(e + 1) \text{ unités d'aires}$$

Donc $A = 16 \left(\frac{3}{2} - \ln(e + 1) \right) \text{ cm}^2$. On a donc : $A \simeq 2.99 \text{ cm}^2$

3. a. $v_0 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} dx = [F(x)]_0^1 = -1 + \ln(e + 1) \simeq 0, 31$
 $v_1 = \int_1^2 \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} dx = -1 + \ln(2e^2 + 1) - \ln(e + 1) \simeq 0, 45$
 $v_2 = \int_2^3 \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} dx = -1 + \ln(3e^3 + 1) - \ln(2e^2 + 1) \simeq 0, 36$

b. Comme f est dérivable et positive sur $[n, n + 1]$, on peut interpréter graphiquement v_n comme l'aire entre la courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$.

c. f est décroissante sur $[n, n + 1]$ puisque $\alpha < n$ dès que $n \geq 2$.

Donc $\forall x \in [n, n + 1] : f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$

D'où $\int_n^{n+1} f(n + 1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$

Or $\int_n^{n+1} f(n + 1) dx = f(n + 1) \int_n^{n+1} 1 dx = f(n + 1)(n + 1 - n) = f(n + 1)$

Donc, pour tout $n \geq 2 : f(n + 1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$

Pour tout $n \geq 2$, on a : $f(n + 1) \leq v_n \leq f(n)$ et $f(n + 2) \leq v_{n+1} \leq f(n + 1)$ donc $v_{n+1} \leq v_n$.

Comme de plus $v_2 \leq v_1$ d'après la question 3) a), on peut conclure que la suite (v_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

d. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n + 1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (v_n) admet en $+\infty$ une limite, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

2 Solution exercice 2

1. (a) $\varphi'(t) = \frac{1}{(t + 2)^2} > 0$, donc φ est croissante $[0, 2]$,

Donc $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2) \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

(b) Il suffit de multiplier l'inégalité précédente par $e^{\frac{t}{n}} > 0$.

$$(c) \int_0^2 \frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}} dt$$

$$\text{Or } \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt = \left[n e^{\frac{t}{n}} \right]_0^2 = n e^{\frac{2}{n}} - n = n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$$

$$\text{Donc } \frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$$

(d) On utilise le changement de variable défini par $h = \frac{2}{n}$, en remarquant que si n tend vers $+\infty$ alors h tend vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \left(e^h - 1 \right) = 2$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = 3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{7}{2}.$$

Si (u_n) admet une limite L , alors en utilisant le théorème des gendarmes : $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2. (a) Pour tout t dans $[0, 2]$, on a $2 - \frac{1}{t+2} = \frac{2(t+2)}{t+2} - \frac{1}{t+2} = \frac{2t+3}{t+2}$

$$\text{D'où } I = \int_0^2 2 - \frac{1}{t+2} dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln 2$$

(b) Pour tout t dans $[0, 2]$, on a $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{2}{n}$, d'où $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ car exp est croissante sur \mathbb{R}

En multipliant l'inégalité précédente par $\left(\frac{2t+3}{t+2} \right)$ qui est positif pour $t \in [0, 2]$, on obtient :

$$\frac{2t+3}{t+2} \leq \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}} \text{ d'où } \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}} dt$$

$$\text{Or } \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}} dt = e^{\frac{2}{n}} \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt = e^{\frac{2}{n}} I \text{ d'où le résultat.}$$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n}} I = I$. Le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) est convergente et que sa limite vaut I .

3 Solution exercice 3

3.1 Partie A

1. $f_1(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x^2}$.

$$\text{Donc } f_1'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

Donc $f_1'(x)$ a même signe que $1 - 2x^2 = -2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$ trinôme du second degré ...

D'où f_1' est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$

Donc f_1 est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$.

2. En posant $u = x^2$ on obtient : $f_1(x) = \sqrt{u} e^{-u} = \frac{1}{\sqrt{u}} \times \frac{u}{e^u}$

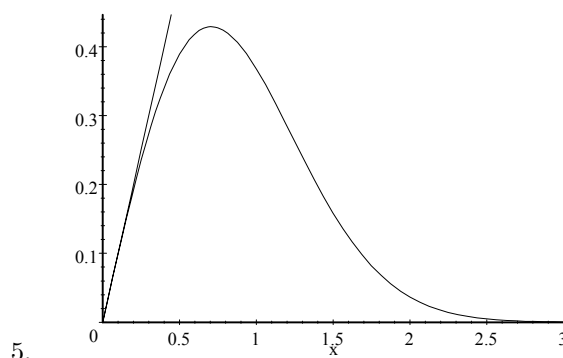
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0 \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} \times \frac{u}{e^u} = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à \mathcal{C}_1 en $+\infty$.

3. Tableau de variation :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0

4. On a $f'_1(0) = 1$ et $f(0) = 0$, la droite Δ d'équation $y = x$ est donc tangente à \mathcal{C}_1 en O .
 De plus $f_1(x) - x = x(1 - e^{-x^2})$ est positif pour tout $x \geq 0$ car $e^{-x^2} \leq 1$ puisque $-x^2 \leq 0$
 Donc la droite Δ , d'équation $y = x$ est la tangente à \mathcal{C}_1 en O et est située au dessus de \mathcal{C}_1 .



3.2 Partie B

- $f'_3(x) = 3x^2e^{-x^2} - 2x^4e^{-x^2} = x^2e^{-x^2}(3 - 2x^2)$
 Donc $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2 = -2(x - \frac{\sqrt{6}}{2})(x + \frac{\sqrt{6}}{2})$ trinôme du second degré ...
 Donc f_3 est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$.
- Les positions relatives de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 dépendent du signe de $f_1(x) - f_3(x) = xe^{-x^2}(1-x)(1+x)$
 Pour x positif ($f_1(x) - f_3(x)$) est donc de même signe que $(1-x)$, on en déduit que sur $[0, 1]$, \mathcal{C}_1 est au-dessus de \mathcal{C}_2 (car $f_1(x) - f_3(x) \geq 0$) et que sur $[1, +\infty[$, \mathcal{C}_1 est au-dessous de \mathcal{C}_2 (car $f_1(x) - f_3(x) \leq 0$).
- Voir la figure de la partie précédente.
- (a) $f_1(x)$ est positif pour tout x , donc l'aire A_1 du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_1 , les deux axes de coordonnées et la droite verticale D d'abscisse 1 vaut : $\int_0^1 f_1(x)dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$
 (b) L'aire A_3 du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_3 , les deux axes de coordonnées et la droite verticale D d'abscisse 1 vaut $\int_0^1 f_3(x)dx$ car $f_3(x)$ est positif pour tout x .
 En intégrant par parties :
 $A_3 = \int_0^1 f_3(x)dx = [x^2F_1(x)]_0^1 - \int_0^1 2xF_1(x)dx = F_1(1) + \int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2e} + A_1$

3.3 Partie C

- $f'_3(x) = u'(x)e^{w(x)} + u(x)w'(x)e^{w(x)} = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$
 Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a x^n et e^{-x^2} positifs, on en déduit que $f'_n(x)$ a même signe que $n - 2x^2 = -2\left(x - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{n}{2}}\right)$ trinôme du second degré ...

On en déduit que f_n est croissante sur $\left[0; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right]$.

La fonction f_n admet donc un maximum pour $x = \frac{n}{2}$.

2. Le point de \mathcal{C}_1 d'ordonnée maximum est donc le point S_1 de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2e}}\right)$

Le point de \mathcal{C}_2 d'ordonnée maximum est le point S_2 de coordonnées $\left(1; \frac{1}{e}\right)$

Le point de \mathcal{C}_3 d'ordonnée maximum est le point S_3 de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$

On remarque que pour $x = 1$, $f_n(x) = e^{-1}$, toutes les courbes \mathcal{C}_n passent donc par le point S_2 .

3. (a) $g'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ a même signe que $u'(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} \cdot \ln \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$
 g est donc décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

(b) L'ordonnée α_n de S_n est $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}(-1 + \ln \frac{n}{2})}$

Donc $\alpha_n = g(n)$ qui est supérieur pour tout n au minimum atteint par $g(x)$ pour $x = 2$, ce minimum est donc α_2 qui est précisément l'ordonnée de S_2 .

On peut obtenir ce résultat sans étudier la fonction g , car il suffit de remarquer que l'ordonnée de S_n est le maximum atteint par f_n sur \mathbb{R} , qui est nécessairement supérieur à l'ordonnée de S_2 puisque \mathcal{C}_n passe par S_2 .