Eléments de solution

Solution 1

1. $G_1 = \text{bar}\left\{(A,2),(B,1),(C,-1)\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2}$
   $G_{-1} = \text{bar}\left\{(A,2),(B,-1),(C,1)\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$

2. (a) La somme des coefficients étant égale à $\left(k^2+1\right)$ est donc non nulle, ce qui assure l'existence du barycentre G_k.
   $\left(k^2+1\right)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_k} = \frac{k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{k^2+1}$
   $k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB} = -k\overrightarrow{BC}$ permet de conclure

   (b) f est dérivable sur $[-1,1]$, de dérivée : $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$
   $f'(x)$ est donc strictement négative sur $]-1,1[$, et donc f est strictement décroissante et dérivable sur $[-1,1]$, ce qui prouve que f définit une bijection de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

   (c) $\overrightarrow{AG_k} = f(k)\overrightarrow{BC}$ et $k \in [-1,1]$, donc $f(k) \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, et donc que G_k décrit le segment $[G_1G_{-1}]$.

3. D'après les propriétés des barycentres, on a les relations :$\left\{\begin{array}{l} 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} \\ 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_{-1}} \end{array}\right.$
   M appartient donc à E si et seulement si $MG_1 = MG_{-1}$
   donc E est le plan médiateur du segment $[G_1G_{-1}]$.

4. $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IA}$
   M appartient donc à F si et seulement si $MG_1 = IA$, ce qui prouve que l'ensemble F est la sphère de centre G_1 et de rayon IA. On peut remarquer que comme $IA = G_1B$, la sphère F passe par le point B.

5. $\overrightarrow{OG_1} = \frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{2} \Rightarrow G_1(0,0,0) \Rightarrow G_1 = O$.
   De même $\overrightarrow{OG_{-1}} = \frac{2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} \Rightarrow G_{-1}(0,0,4)$.
   Le plan E passe par le milieu A de $[G_1G_{-1}]$, et a pour vecteur normal $\overrightarrow{G_1G_{-1}}(0,0,4)$.
   On en déduit une équation du plan $E : z = 2$
   La sphère F a pour centre $G_1 = O$. Le point I, milieu de $[BC]$, a pour coordonnées $(-1,2,3)$. Le rayon de la sphère est donc égal à :$IA = \left\|\overrightarrow{IA}\right\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
   et son équation est $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 6$
   L'intersection de E et de F est donc caractérisée par le système : $\left\{\begin{array}{l} z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=2 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right.$
   donc E et F sont sécants et leur intersection est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   On pouvait aussi remarquer que la distance du centre de la sphère F au plan médiateur de G_1G_{-1} est égale à $G_10 = 2$, qui est inférieur au rayon de la sphère qui vaut $\sqrt{6}$, ce qui prouve bien que les deux ensembles sont sécants.

Solution 2

1. (a) Avec le barycentre partiel : soit B' le barycentre de $[(A;1);(C;1)]$, milieu de $[AC]$.
   G est le barycentre de $[(B;-1);(B';2)]$, défini par $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BB'}$: d'où sa construction.

   b. Soit B'' le barycentre de $[(A;1);(C;-2)]$, défini par $\overrightarrow{AB''} = 2\overrightarrow{AC}$.
   G' est le barycentre de $[(B'';-1);(B;5)]$, défini par $\overrightarrow{BG'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BB''}$: d'où sa construction.

2. (a) Par définition de G' : $4\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Or, par définition de G : $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D'où $4\overrightarrow{GG'} = 9\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$
De même $4\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Or $\overrightarrow{JA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc $4\overrightarrow{JG'} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
Donc $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$:
l'alignement des points G, J et G' implique donc que (GG') coupe (AB) en J.

   b. Par définition de I : $\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
On remarque que $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GI}$. Donc $I \in (GG')$.

3. (a) K est par hypothèse isobarycentre de A et O, points affectés des mêmes coefficients.
O est par hypothèse isobarycentre de C et D, points affectés des mêmes coefficients.
Le coefficient de O est le double de celui de C ou D, et le même que celui de A : soit $a = 2\alpha$ et $d = c = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Par exemple $a = 2$ et $b = c = 1$.

   b. K, barycentre de $[(A;2\alpha);(C;\alpha);(D;\alpha)]$, est aussi barycentre de $(D;\alpha)$ et du barycentre de $[(A;2\alpha);(C;\alpha)]$ qui est situé sur (AC) et aligné avec D et K. Ce barycentre de $[(A;2\alpha);(C;\alpha)]$ est donc le point X. Par suite $a' = 2\alpha$ et $c' = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Par exemple $a' = 2$ et $c' = 1$.