Nombres complexes

1 Définitions

Définition 1 On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $a+ib$ avec $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$ et où i est un nombre tel que $\boxed{i^2=-1}$.
a est la partie réelle de z. On note $a=\mathrm{Re}\,(z)$
b est la partie imaginaire de z. On note $b=\mathrm{Im}\,(z)$
$a+ib$ est la forme algébrique de z.
Un nombre de la forme ib avec $b\in\mathbb{R}$ est dit imaginaire pur.

Remarque 1 $\forall a\in\mathbb{R}: a=a+0.i\in\mathbb{C}$. Donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

Egalité de deux complexes : $\boxed{a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}}$

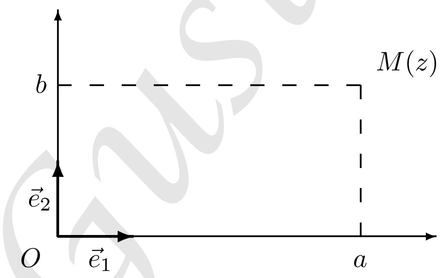
Exemple 1 On pose $z_1=2+3i$ et $z_2=1-i$. Calculer :

1. z_1+z_2
2. z_1-z_2
3. $3z_1-6z_2$
4. $z_1.z_2$
5. $\dfrac{z_1}{z_2}$
6. $\mathrm{Im}\,(z_1+3z_2)$

2 Interprétation géométrique

On se place dans le plan muni d'un repère **orthonormé** $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ qu'on appelle dans cette situation plan complexe.

Définition 2 L'affixe z d'un point $M\,(a,b)$ est le complexe $z=a+ib$.
L'affixe z d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le complexe $z=a+ib$ $\qquad M(z)$
$M\,(a;b)$ est appelé image du complexe $z=a+ib$
L'axe des abscisses est appelé axe des réels, l'axe des ordonnées : axe des imaginaires.



$z=a+ib$

Remarque 2 Les points M et M' d'affixes respectives z et $-z$ sont symétriques par rapport à O.

Théorème 1 $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A}$

Démonstration. Si $z_A=x_A+iy_A$ et $z_B=x_B+iy_B$: $A\,(x_A;y_A)$ et $B\,(x_B;y_B)$.
D'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ puis $z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i\,(y_B-y_A)=z_B-z_A$

Théorème 2 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$

Démonstration. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées, donc mêmes affixes.

3 Complexe conjugué

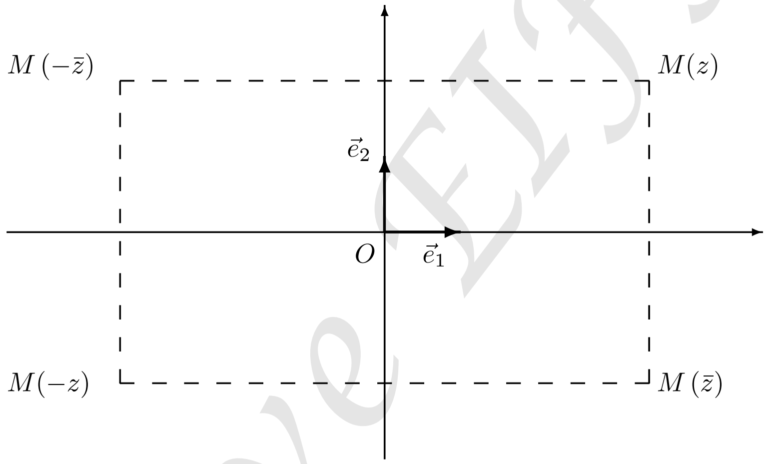
Définition 3 Le complexe conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$

Proposition 1 $\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z}$ $\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z}$

Proposition 2 $\boxed{\overline{(\bar{z})} = z \quad ; \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad ; \quad \overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \quad ; \quad \text{si } z_2 \neq 0 : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}}$

Remarque 3 $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Remarque 4 Les points d'affixes $z, -z, \bar{z}$ et $-\bar{z}$ présentent des symétries (voir figure).



Exemple 2 On pose $z = \dfrac{5(1-i)}{2+i}$ Calculer $\bar{z}$

Exemple 3 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : \dfrac{2 + 3z\bar{z}}{z + \bar{z}} \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{2i + z - \bar{z}}{3 + 2z\bar{z}} \in i\mathbb{R}$

Exemple 4 Dans le plan complexe, on donne les points A, M et M' d'affixes respectives a, z et z'.
On suppose que ces trois points distincts et que M et M' sont symétriques par rapport à la parallèle à l'axe des abscisses passant par A. Déterminer z' en fonction de z et de a.

4 Module d'un complexe

Définition 4 Le module du complexe $z = a + ib$ est le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.

Théorème 3 Si M a pour affixe z : $\boxed{|z| = OM}$

Théorème 4 $\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$

Remarque 5 $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$ (Utiliser la figure précédente).

Théorème 5 $\boxed{z.\bar{z} = |z|^2}$

Remarque 6 Si $|z| = 1 : \dfrac{1}{z} = \bar{z}$ (on a évidemment $z \neq 0$).

Proposition 3 $\boxed{|z_1.z_2| = |z_1| \, . \, |z_2|}$ et $\boxed{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$

Démonstration. Utiliser $|z|^2 = z.\bar{z}$ pour la première égalité et $z = \dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z.z_2$ pour la seconde.

Remarque 7 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (utiliser l'interprétation géométrique du module)

Exemple 5 Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et z un complexe tel que

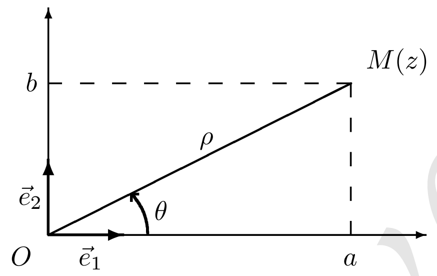
$$(1 + iz)(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)(1 + i \tan \alpha)$$

Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$ et en déduire que $z \in \mathbb{R}$.

5 Forme trigonométrique

5.1 Arguments d'un complexe

Définition 5 Si z complexe **non nul** a pour image M, on appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure, en radians, de l'angle $\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)$



$z = a + ib$

$\rho = |z| = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \arg(z) = \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)$

$a = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad b = \rho \sin \theta$

Remarque 8 $\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près.

Exemple 6 Calculer module et argument de $1, -1, i, -i, 1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$

Remarque 9 $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

Remarque 10 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \theta = k\pi$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Remarque 11 $\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \end{cases}}$

Remarque 12 On a $z = a + ib = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cette dernière forme d'écriture de z est appelée forme trigonométrique . Elle se note aussi sous forme condensée: $[\rho; \theta]$.

$$\boxed{z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho; \theta]}$$

Exemple 7 Déterminer module et argument de $z = \sqrt{3} + i$

5.2 Produit et quotient de nombres complexes

Le développement du produit $\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ montre que

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi}$$

On en déduit (par récurrence) : Si $n \in \mathbb{Z}$: $\boxed{\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi}$

Remarque 13 Formule de Moivre : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

Théorème 6 $\boxed{\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi}$

Démonstration. Utiliser $z = \dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z.z_2$

Exemple 8 Déterminer module et argument de $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ et $z_2 = \left(\sqrt{3}-i\right)^3$.

6 Notation exponentielle

Définition 6 Si $\theta \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Remarque 14 $\boxed{e^0 = 1}$ $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ $\boxed{e^{i\pi/2} = i}$ $\boxed{\left|e^{i\theta}\right| = 1}$ $\boxed{\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta}$

Définition 7 Si $z \in \mathbb{C}$ a pour module ρ et pour argument θ : $z = \rho e^{i\theta}$ est la forme exponentielle de z.

Théorème 7

$\rho e^{i\theta}.\rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i\left(\theta+\theta'\right)}$	$\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i\left(\theta-\theta'\right)}$	$\overline{\left(\rho e^{i\theta}\right)} = \rho e^{-i\theta}$
$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$	$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$	$\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Exemple 9 Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Ecrire sous forme exponentielle :

1. $1 + e^{i\theta}$
2. $1 - e^{i\theta}$
3. $1 + e^{-2i\theta}$
4. $1 + ie^{i\theta}$
5. $\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$
6. $\dfrac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1-\sin\theta + i\cos\theta}$

7 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit à résoudre $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c **réels**. $(a \neq 0)$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
En procédant comme dans $\mathbb{R}$ mais en remarquant que, lorsque $\Delta < 0$, $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions **réelles** :
   $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède une racine double réelle : $z = \dfrac{-b}{2a}$
3. Si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées :
   $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + 1 = 0$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $z^4 = 9$

8 Complexes et géométrie

8.1 Distances et angles

Théorème 8 Si A, B, C, D ont pour affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D :

$\left\Vert \overrightarrow{AB} \right\Vert = \lvert z_B - z_A \rvert$	$(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$	$\arg \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

Démonstration. Soit M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. Notons z_M l'affixe de M.
$z_M = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. D'où :
$\left\Vert \overrightarrow{AB} \right\Vert = \left\Vert \overrightarrow{OM} \right\Vert = \lvert z_M \rvert = \lvert z_B - z_A \rvert$.
$\arg (z_B - z_A) = \arg (z_M) = \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$.
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) = \arg (z_D - z_C) - \arg (z_B - z_A) = \arg \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

Exemple 11 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_C = -\sqrt{3} - 3i$.

1. Calculer les longueurs AB, BC et AC. Conclusion
2. Donner une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et en déduire que $\arg \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
3. Justifier que $\left\lvert \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right\rvert = 1$.
4. Retrouver les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{3}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{3}$ en montrant que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos \dfrac{\pi}{3} + i \sin \dfrac{\pi}{3}$

8.2 Transformations

Théorème 9 Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b. M le point d'affixe z, M' celui d'affixe z' :

$$\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow z' = z + b}$$

Théorème 10 Soit r la rotation de centre O et d'angle θ. M le point d'affixe z, M' celui d'affixe z' :

$$\boxed{M' = r(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta} z}$$

Exemple 12 Identifier les transformations qui à tout point M d'affixe z associent le point M' d'affixe z' telle que :

1. $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) z$
2. $z' = i^3 z$
3. $z' = z + i(1 + i)$

Exemple 13 Soit r la rotation de centre O d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Soit $M'(x', y')$ l'image de M par r. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.