

## Eléments de solution

**Solution 1** Rappel :  $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$  et  $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

Posons  $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ . Alors  $\bar{Z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = Z$  *cqfd*

**Solution 2**  $|a - b| = (a - b) \overline{(a - b)} = (a - b) (\bar{a} - \bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} - a\bar{b} - a\bar{b}$   
 $|1 - \bar{a}b| = (1 - \bar{a}b) \overline{(1 - \bar{a}b)} = (1 - \bar{a}b) (1 - a\bar{b}) = 1 + a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{b} - a\bar{b}$   
 D'où

$$\begin{aligned} |a - b| = |1 - \bar{a}b| &\Leftrightarrow a\bar{a} + b\bar{b} = 1 + a\bar{a}b\bar{b} \\ &\Leftrightarrow a\bar{a} (1 - b\bar{b}) + b\bar{b} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - a\bar{a}) (1 - b\bar{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a\bar{a} = 1 \text{ ou } b\bar{b} = 1 \text{ soit } |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1 \end{aligned}$$

**Solution 3 1. Remplacer**  $z$  par  $1 + i$  dans  $P(z)$  conduit à  $P(1 + i) = 0$

**2.** D'après les propriétés du conjugué :  $\overline{P(z)} = \bar{z}^4 - 3\bar{z}^3 + \frac{9}{2}\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 1 = P(\bar{z})$

**3.** Si  $\alpha$  est racine de  $P$  :  $P(\alpha) = 0$ . D'où  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$

**4.**  $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^4} - 3\frac{1}{\alpha^3} + \frac{9}{2}\frac{1}{\alpha^2} - 3\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha^4} \left(1 - 3\alpha + \frac{9}{2}\alpha^2 - 3\alpha^3 + 1\right) = \frac{1}{\alpha^4} P(\alpha) = 0$

*Remarque* :  $\alpha \neq 0$  car  $P(0) \neq 0$ .

**5.**  $\alpha = 1 + i$  est racine donc  $\overline{1 + i} = 1 - i$  est racine,  $\frac{1}{1 + i}$  est racine et  $\overline{\frac{1}{1 + i}}$  est racine.

Un polynôme de degré 4 ayant au plus 4 racines, on a trouvé toutes les racines de  $P$  qui sont donc :

$$1 + i ; 1 - i ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

**Solution 4** Rappel : Si  $a, b, c$  sont réels et si  $\Delta < 0$ , l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet deux racines complexes conjuguées. Dans l'énoncé on n'a pas une équation à coefficients réels !!!

**1.** Si l'équation admet deux solutions complexes conjuguées  $a$  et  $\bar{a}$  :  $z^2 - \alpha z + (1 + i)\alpha - 2i = (z - a)(z - \bar{a})$

Or  $(z - a)(z - \bar{a}) = z^2 - (a + \bar{a})z + a\bar{a}$ .

On a donc :  $\forall z \in \mathbb{C} : z^2 - \alpha z + (1 + i)\alpha - 2i = z^2 - (a + \bar{a})z + a\bar{a}$

D'où (deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients) :

$$\alpha = a + \bar{a} \text{ et } (1 + i)\alpha - 2i = a\bar{a}.$$

$$a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}. \text{ D'où } (1 + i)\alpha - 2i = \alpha + i(\alpha - 2) = a\bar{a} = |a| \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc  $\alpha - 2 = 0$  soit  $\alpha = 2$ .

**2.** L'équation s'écrit  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .  $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ .

Donc deux racines complexes conjuguées (surpris ?)

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i \text{ et } z_2 = 1 + i$$