

Eléments de solution

Exercice 1

1. (a) $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx.$

Posons $u(x) = 1-x$ et $v'(x) = e^{-x}$. D'où $u'(x) = -1$ et $v(x) = -e^{-x}$ par exemple.

$$I_1 = [(x_1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = 1 + [e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{e}$$

(b) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est croissante sur $[0; 1]$.
D'où $\forall x \in [0; 1] : 0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ car $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx \text{ et } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

(c) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx.$

Posons $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$. D'où $u'(x) = (n+1)(1-x)^n(-1)$ et $v(x) = -e^{-x}$

par exemple. Alors : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left([-(1-x)^{n+1} e^{-x}]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \right) =$
$$\frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

(d) $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = 0$. La formule est donc vraie pour $n = 0$.

Supposons la formule vraie pour un naturel non nul n c'est à dire $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

$$\text{Alors } a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)!} - I_n \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}.$$

La formule est donc vraie pour $n+1$.

Donc $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ est vraie pour tous les entiers naturels non nuls.

(e) On déduit du résultat précédent : $\frac{1}{e} - I_n \leq a_n \leq \frac{1}{e} + I_n$.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} + I_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} - I_n \right) = \frac{1}{e}. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$$

Exercice 2

1. (a) $a_1 = 39 ; b_1 = 19 ; c_1 = 21 ; a_2 = 399 ; b_2 = 199 ; c_2 = 201 ; a_3 = 3999 ; b_3 = 1999$ et $c_3 = 2001$.

(b) Par définition d'un nombre écrit en base 10, on peut dire de manière évidente que a_n et c_n ont $(n+1)$ chiffres.

$$10 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a_n \equiv 4 \times 1 - 1 = 3 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid a_n$$

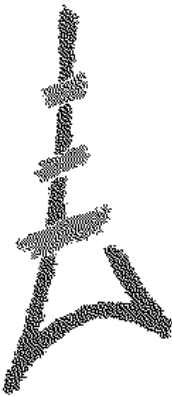
De même, $c_n \equiv 2 \times 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, donc c_n est aussi divisible par 3.

(c) Comme $\sqrt{b_3} \simeq 44,7$, pour montrer que b_3 est premier, il suffit de vérifier que b_3 n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs à 45, c'est à dire par 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43. Ce qui se vérifie et permet d'affirmer que b_3 est premier.

(d) Pour tout entier naturel non nul n ,

$$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1) \times (2 \times 10^n + 1) = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}.$$

On a alors $a_6 = b_3 \times c_3 = b_3 \times 2001 = 1999 \times (3 \times 23 \times 29)$



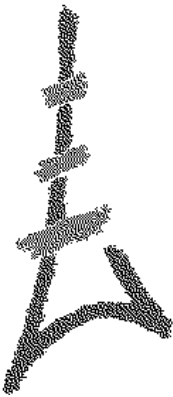
- (e) $c_n = b_n + 2 \Rightarrow b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ car $a = bq + r \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$.
 $c_n \wedge 2 = 1$ car c_n est impair donc $b_n \wedge c_n = 1$.
2. (a) $b_3 \wedge c_3 = 1$ donc le théorème de Bezout prouve l'existence d'au moins une solution à l'équation (1).
- (b) $c_3 = 2001 = 1999 \times 1 + 2 = b_3 + 2$ et $b_3 = 1999 = 2 \times 999 + 1$. Donc
 $999c_3 = 999b_3 + 2 \times 999 \Rightarrow 999c_3 = 999b_3 + (b_3 - 1)$ et donc $1000b_3 - 999c_3 = 1$
- (c) $\begin{cases} 1000b_3 - 999c_3 = 1 \\ b_3x + c_3y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1000 - x)b_3 = (999 + y)c_3$
 Donc b_3 divise le produit $(999 + y)c_3$. Comme b_3 est premier avec c_3 , b_3 divise $999 + y$ (théorème de Gauss). Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $999 + y = b_3k \Leftrightarrow y = -999 - 1999k$
 En reportant dans l'équation (2) on obtient : $x = x_0 + c_3k = 1000 + 2001k$
 Les solutions de l'équation (1) sont donc $\{(1000 + 2001k, -999 - 1999k); k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 3

1. On a : $f(0) = -i$ donc l'image par l'application f du point O est le point B .
2. $f(z) = 1 + i \Leftrightarrow \frac{1 + iz}{z + i} = 1 + i \Leftrightarrow 1 + iz = (z + i)(1 + i) \Leftrightarrow 2 - z - i = 0 \Leftrightarrow z = 2 - i$
 Donc le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1 + i$ est le point d'affixe $2 - i$.
3. $\frac{1 + iz}{z + i} = z \Leftrightarrow 1 + iz = z(z + i) \Leftrightarrow 1 + iz = z^2 + iz \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$.
4. $\frac{i(z - i)}{z + i} = \frac{1 + iz}{z + i} = z' \Rightarrow OM' = |z'| = \left| \frac{i(z - i)}{z + i} \right| = \frac{|i||z - i|}{|z + i|} = \frac{AM}{BM}$
 $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(z') = \arg\left(\frac{i(z - i)}{z + i}\right) = \arg(i) + \arg\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{i - z}{-i - z}\right) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
5. L'axe des abscisses est la médiatrice de $[AB]$, donc tout point M de l'axe des abscisses vérifie : $MA = MB$
 D'où $OM' = \frac{AM}{BM} = 1$ ce qui prouve que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.
6. Si M est un point quelconque du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B , alors l'angle AMB est droit
 Donc, modulo 2π : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2}$
 L'égalité de la question 4) implique alors que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \pi + 2k\pi$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 2k\pi$
 On a donc bien prouvé que le point M' est situé sur l'axe des abscisses.

Exercice 4

1. Préliminaires
- (a) Par somme, la fonction g est évidemment dérivable sur \mathbb{R} , et $g'(t) = e^t - 1$
 Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} et qu'elle prend en 0 la valeur 1, on peut en conclure que si $t < 0$, alors $g'(t) < 0$, et donc que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- , et que si $t > 0$, alors $g'(t) > 0$, et que g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
 Le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est donc atteint en 0 et vaut $g(0) = 0$.
- i. La fonction g admet en 0 un minimum valant 0, donc $\forall t \in \mathbb{R} : g(t) \geq 0$ d'où $e^t \geq t + 1$
 Or $t + 1 > t \Rightarrow e^t > t \Rightarrow e^{-t}e^t > e^{-t}t \Rightarrow 1 > e^{-t}t \Rightarrow -1 < -e^{-t}t$.
- ii. $e^t \geq t + 1 \Rightarrow \ln(e^t) \geq \ln(t + 1) \Rightarrow t \geq \ln(t + 1)$
- (b) En posant $t = -xe^{-x}$ (possible car $\forall t \in \mathbb{R} : -1 < -te^{-t}$) on obtient $\ln(1 - xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$
2. Étude d'une fonction
 f est bien définie sur \mathbb{R} car $e^x > x \Rightarrow e^x - x > 0$



- (a) $1 > e^{-t} \Rightarrow 1 - te^{-t} > 0$
 $f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x(1 - xe^{-x})) = x^2 - 2 \ln(e^x) - 2 \ln(1 - xe^{-x}) = x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x})$
 D'après le formulaire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - xe^{-x}) = 0$
 Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right) - 2 \ln(1 - xe^{-x}) \right) = +\infty$
- (b) f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2x - 2 \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{2x(e^x - x) - 2(e^x - 1)}{e^x - x} = \frac{2xe^x - 2x^2 - 2e^x + 2}{e^x - x}$
 Or $2(x-1)(e^x - x - 1) = 2xe^x - 2x^2 - 2e^x + 2$ donc $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{2(x-1)g(x)}{e^x - x}$
 $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > x \Rightarrow e^x - x > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $(x-1)g(x)$.
 Or g est positive, ne s'annulant que pour $x = 0$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0	\searrow
			$1 - 2 \ln(e - 1)$	\nearrow
				$+\infty$

- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln(1 - xe^{-x})) = 0$. Donc (C) et (P) sont asymptotes vers $+\infty$.
 $f(x) - (x^2 - 2x) = -2 \ln(1 - xe^{-x})$
 $1 - xe^{-x} > 1 \Leftrightarrow -xe^{-x} > 0 \Leftrightarrow x < 0$
 $x < 0 \Leftrightarrow \ln(1 - xe^{-x}) > 0 \Leftrightarrow f(x) - (x^2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow (C)$ est au-dessous de (P) .
- (d) Tangente D à la courbe (C) au point d'abscisse $0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$
 Tangente D' à la courbe (P) au point d'abscisse $0 : y = -x$

3. Étude d'une intégrale

- (a) i. $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} xe^{-x} dx - \int_0^n xe^{-x} dx = \int_n^{n+1} xe^{-x} dx$
 $\forall x \in [n; n+1] : xe^{-x} \geq 0 \Rightarrow \int_n^{n+1} xe^{-x} dx \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.
- ii. Si $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x} : u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$
 $u_n = [-xe^{-x}]_0^n - \int_0^n (-e^{-x}) dx = 1 - ne^{-n} - [e^{-x}]_0^n = 1 - ne^{-n} - e^{-n}$
- iii. D'après le formulaire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
- (b) i. $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(1 - xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$ En intégrant cette inégalité entre 0 et n positif, on obtient :
 $\int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx \leq \int_0^n -xe^{-x} dx$ d'où $-2 \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx \geq 2 \int_0^n xe^{-x} dx$ et donc $I_n \geq 2u_n$
- ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n = 2$. En admettant que la suite (I_n) a pour limite l , le passage à la limite donne : $l \geq 2$