



Eléments de solution

Exercice 1

1. (a) X peut prendre comme valeurs 0, 1 ou 2 :

$p(X = 0) = \frac{C_2^0 \times C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$ car l'on choisit 0 billet gagnant parmi les deux gagnants et 2 billets perdants parmi les 8 perdants.

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45} \quad ; \quad p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

D'où la loi de X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

- (b) Il y a dans ce cas à choisir un billet gagnant parmi les deux gagnants et 1 billet perdant parmi les $(n - 2)$ perdants.

Comme les tirages sont équiprobables, on a $p_n = \frac{C_2^1 \times C_{n-2}^1}{C_n^2} = \frac{2 \times (n - 2)}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{4(n - 2)}{n(n - 1)}$

2. (a) On reconnaît un schéma de Bernoulli

$$P(Y = k) = C_2^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{2-k} \quad \text{soit}$$

k	0	1	2
$p(Y = k)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

(b) $q_n = C_2^1 \times \left(\frac{2}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2-1} = \frac{4(n - 2)}{n^2}$

3. (a) Pour tout n supérieur ou égal à 3 : $p_n - q_n = \frac{4(n - 2)}{n(n - 1)} - \frac{4(n - 2)}{n^2} = \frac{4(n - 2)}{n^2(n - 1)}$

(b) Pour tout n supérieur ou égal à 3 : $n - 2 \leq n - 1 \Rightarrow \frac{4(n - 2)}{n^2(n - 1)} \leq \frac{4(n - 1)}{n^2(n - 1)} \leq \frac{4}{n^2}$

Pour que $p_n - q_n < 10^{-3}$, il suffit que $\frac{4}{n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n > \sqrt{4000} \simeq 63.246$

Il suffit de choisir $n_0 = 64$.

- (c) Pour tout n supérieur ou égal à 3 : $p_n - q_n > 0 \Rightarrow p_n > q_n$, et donc qu'il est préférable de tirer les billets simultanément.

Exercice 2

1. (a) $z' = 2(z - 1 - i) + z + 4 + i = 3z + 2 - i$

(b) Soit ω l'affixe du point fixe Ω cherché. $\omega = 3\omega + 2 - i \Rightarrow \omega = -1 + \frac{1}{2}i$

$z' = 3z + 2 - i$ est de la forme $z' = kz + b$ avec $k = 3$ qui caractérise une homothétie de rapport 3.

Cette homothétie est de centre Ω puisque ω vérifie l'équation aux points fixes.

2. (a) $G = \{5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$ et $H = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23\}$.

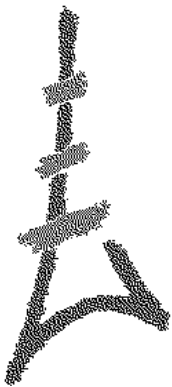
(b) $x' - y' = 3x + 2 - (3y - 1) = 3(x - y + 1)$. Donc $x' - y'$ est multiple de 3.

- (c) Un entier est pair ou impair.

Lorsque deux entiers sont pairs tous les deux ou impairs tous les deux, leur somme et leur différence sont paires.

Lorsque l'un des deux est pair et l'autre impair, leur somme et leur différence sont impaires.

Dans tous les cas, la somme et la différence de deux entiers ont donc même parité.



- (d) m non nul est le produit des deux entiers non nuls $x' - y'$ et $x' + y'$ de même parité et m est pair : les deux entiers $x' - y'$ et $x' + y'$ sont donc pairs.
De plus, $x' - y'$ est multiple de 3 premier avec 2. Il en résulte que $x' - y'$ est multiple de 6.
 $x' - y'$ ne peut être multiple de 30 car la plus grande valeur de $x' - y'$ est 24.
- (e) $x' + y'$ est pair et par hypothèse 5 divise $(x' - y')(x' + y')$. Or 5 ne peut aussi diviser $x' - y'$ qui déjà divisible par 2 et 3 serait alors divisible par 30. Donc 5 divise $x' + y'$.
 $x' + y'$, divisible par 2 et 5 premiers entre eux, est divisible par 10.
On cherche les couples (x', y') de $G \times H$ tels que $x' - y'$ soit divisible par 6 et $x' + y'$ par 10.
Les couples (x', y') qui conviennent sont : (8; 2), (17; 23), 23; 17).
Les couples (x, y) correspondants sont alors : (2; 1), (5; 8), (7; 6).

Exercice 3

1. (a) Si z_1 est l'affixe de M_1 , on a $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z$
Si z' est l'affixe de M' , alors on a $z' = z_1 - 1$
D'où $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1$
- (b) En appliquant la formule précédente, si b' est l'affixe de l'image du point B :
 $b' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) - 1 = 0$ ce qui montre que $T(B) = O$.
- (c) Le point M d'affixe z est invariant par T si et seulement si $T(M) = M$, ce qui équivaut à
 $z = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
2. (a) Si $z \neq 0$: $\frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1}{z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)(x + iy) - 1}{x + iy} = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}iy + \frac{1}{2}i\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 1}{x + iy}$
 $= \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}iy + \frac{1}{2}i\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 1\right)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}y^2 + y\right)}{x^2 + y^2}$
d'où $\text{Re}\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x}{x^2 + y^2}$
- (b) OMM' est rectangle en O si et seulement si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
 $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, donc ces deux conditions équivalent si $\frac{z'}{z} \neq 0$ à $\text{Re}\left(\frac{z'}{z}\right) = 0$, ce qui équivaut à $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x = 0$ et $z \neq 0$ et $z' \neq 0$
C'est une équation du cercle de centre A et de rayon 1 : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
De plus $z' = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ donc (E) est le cercle de centre A et de rayon 1 privé du point d'affixe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, c'est à dire B et de O .
3. (a) $(1 - 1)^2 + 1^2 = 1 \Rightarrow M \in (E)$.
- (b) $|z'| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + i) - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \right|$
 $= \left| \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \times (-1 + i) \right| = \left| \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \right| \times |-1 + i|$
 $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- (c) Comme l'unité d'aire est égale à 16 cm², l'aire du triangle OMM' est donc égale à $16 \times \frac{OM \times OM'}{2} = 16 \times \frac{|z| \times |z'|}{2} = 8\sqrt{3} + 8$ cm²

Exercice 4

PARTIE A

1) 1) $f'_n(x) = \frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3}$

2) $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{n-2}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}$.

$x \in]0, e^{\frac{n-2}{2n}}[\Rightarrow \ln x < \frac{n-2}{2n} \Rightarrow f'_n(x) > 0 \Rightarrow f_n$ strictement croissante sur $]0, e^{\frac{n-2}{2n}}[$

De même, f_n est strictement décroissante sur $]e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty[$.

3) $f_n(x) = \frac{1}{x^2} + n \frac{\ln x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ d'après le formulaire. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

x	0	$e^{\frac{n-2}{2n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	$-$
$f_n(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) (1 + n \ln x) = -\infty$.

II) 2) (a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Résultat indépendant de n .

(b) On a $f_4(x) - f_3(x) = f_3(x) - f_2(x)$, donc $f_3(x) = \frac{f_2(x) + f_4(x)}{2}$. Si on note M_2, M_3 et M_4 les points de C_2, C_3 et C_4 d'abscisses x, M_3 est donc le milieu de $[M_2M_4]$, ce qui prouve que l'on obtient M_4 comme symétrique de M_2 par rapport à M_3 . C_4 est donc symétrique de C_2 par rapport à C_3 .

PARTIE B

1) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$

2) Sur $[1, e]$, $\frac{\ln x}{x^2} \geq 0$, donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$, donc C_{n+1} est située au-dessus de C_n , donc l'aire cherchée est égale en unités d'aire à $\int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = I = 1 - \frac{2}{e}$ u.a

3) a) La fonction f_2 est dérivable et positive sur $[1, e]$

donc l'aire cherchée est égale à $A_2 = \int_1^e f_2(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} + 2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e + 2I = 3 - \frac{5}{e}$

b) De même $A_n = \int_1^e f_n(x) dx$ d'où $A_{n+1} - A_n = I$ pour tout $n \geq 2$. Donc la suite (A_n) est arithmétique de raison I , dont la question 2) a fourni une interprétation géométrique.

PARTIE C

1) a) $n \geq 3 \Rightarrow \frac{n-2}{2n} > 0 \Rightarrow e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \Rightarrow f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) > f_n(1) = 1$

b) f_n est strictement croissante sur $]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[$, et $f_n(1) = 1$, donc $f_n(x) > 1$ sur $]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[$, ce qui prouve bien que l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut pas avoir de solution sur cet intervalle.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ donc il existe α réel tel que $x \geq \alpha \Rightarrow f(x) < \frac{1}{2}$

f_n étant strictement décroissante sur $]e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty[$ et $f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) > 1$ donc $\alpha > e^{\frac{n-2}{2n}}$

La fonction f_n est dérivable et strictement décroissante sur $]e^{\frac{n-2}{2n}}; \alpha]$

f_n est donc une bijection de $]e^{\frac{n-2}{2n}}; \alpha]$ sur $]f_n(\alpha); f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right)]$.

Comme $f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) > 1$ et $f_n(\alpha) < \frac{1}{2} < 1$, il existe α_n unique solution de $f_n(x) = 1$ sur cet intervalle.

D'après les variations de f_n l'équation $f_n(x) = 1$ ne possède pas de solution dans $] \alpha; +\infty[$.

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ possède une et une seule solution dans $]e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[$

3) (a) $f_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{2}$

$n > e^2 \Rightarrow \frac{\ln n}{2} > \frac{\ln e^2}{2} = 1 \Rightarrow f_n(\sqrt{n}) > 1$

(b) $n \geq 8 \Rightarrow n > e^2 \Rightarrow f_n(\sqrt{n}) > 1 \Rightarrow \alpha_n > \sqrt{n}$, car f_n strictement décroissante sur $]e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[$. D'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$