



Eléments de solution test 12

Exercice 1 spécialistes

- (a) $c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $d = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

(b) Tracés des points A, B, C et D .

(c) On montre $OA = OB = AC = BC = 1$ en utilisant $AB = |z_B - z_A|$.
- $\frac{d-a}{c-a} = \frac{-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) = \pi [2\pi] \Rightarrow D, A$ et C sont alignés.

Autre méthode :

$z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_{\overrightarrow{DA}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $z_{\overrightarrow{AC}} = 2z_{\overrightarrow{DA}}$ d'où $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DA}$
- $k = \frac{OC}{OA} = \frac{|c|}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ et $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \arg \frac{c}{a} = \arg c = \frac{\pi}{6} [\text{mod } 2\pi]$
- $s(A) = C, s(D) = F, s(C) = G$ et D, A et C sont alignés, donc, les points F, C et G sont alignés car une similitude conserve l'alignement.
- $s(D) = F \Rightarrow \frac{OF}{OD} = k = \sqrt{3} \Rightarrow OF = \sqrt{3}OD = \sqrt{3}|d| = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

$s(D) = F \Rightarrow (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OF}) = \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arg \frac{f}{d} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arg f = \arg d + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0 [2\pi]$

Donc $f = \frac{3}{2}$
- (a) écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a = e^{i\theta}$ et $\theta \neq 0$ qui caractérise une rotation d'angle θ et de centre le point d'affixe z telle que $z = az + b$ soit ici :

$z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = 1 = a$

Donc, r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

(b) $\frac{b-a}{-a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{-a}\right) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Δ est la droite passant par A telle que $2((AO), \Delta) = \theta = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$, donc, $(\Delta) = (AB)$

D'où $r = \sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}$.

(c) $\sigma_{(AO)}$ admet pour écriture complexe $z' = \bar{z}$

Donc $r \circ \sigma_{(AO)}$ admet pour écriture complexe $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)} = \sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)} \circ \sigma_{(AO)} = \sigma_{(AB)}$.

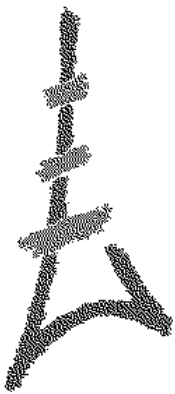
Exercice 2 non spécialistes

- $p_k = p_1 + (k-1)r$ et $\sum_{k=1}^6 p_k = 1$

D'où $6p_1 + r + 2r + 3r + 4r + 5r = 1$ puis $6p_1 + 15r = 1$

$r \neq 0$ car les faces ne sont pas équiprobables.

De plus, si q est la raison de la suite géométrique : $q = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1+r}{p_1} = 1 + \frac{r}{p_1}$ et $p_4 = p_1q^2$



Remarque : $p_1 \neq 0$ sinon $p_2 = 0$ puis $r = 0$

On a donc, puisque $p_4 = p_1 + 3r$:

$$p_4 = p_1 q^2 = p_1 \left(1 + \frac{r}{p_1}\right)^2 \Leftrightarrow p_1 + 3r = p_1 \left(1 + \frac{r}{p_1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{r}{p_1} \left(\frac{r}{p_1} - 1\right) = 0$$

D'où $r = p_1$ puis $6r + 15r = 1$ (car $6p_1 + 15r = 1$) et enfin : $r = p_1 = \frac{1}{21}$

$$D'où $p_k = p_1 + (k - 1)r = \frac{1}{21} + (k - 1)\frac{1}{21} = \frac{k}{21}$$$

2. (a) $p(A) = p(2 \cup 4 \cup 6) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

De même $p(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{6}{7}$ et $p(C) = p_3 + p_4 = \frac{1}{3}$

(b) $p(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{p_4 + p_6}{\frac{4}{7}} = \frac{5}{6}$ car $A \cap B = \{4; 6\} \Rightarrow p(A \cap B) = p_4 + p_6$

(c) $p(A \cap B) = \frac{10}{21} \neq p(A)p(B) = \frac{24}{49}$ donc A et B **non** indépendants

$p(A \cap C) = p_4 = \frac{4}{21} = p(A)p(C)$ donc A et C indépendants.

3. (a) $p(A \cap G) = p(G/A)p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

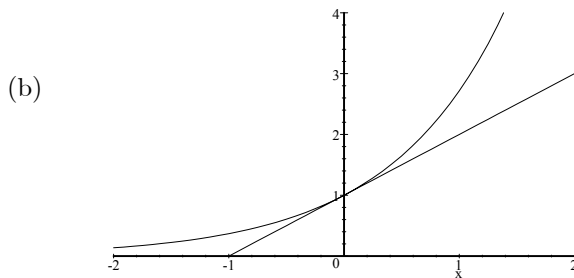
De même $p(\bar{A} \cap G) = p(G/\bar{A})p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{7}$

D'où $p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \bar{A}) = \frac{3}{7}$ (formule des probabilités totales)

(b) $p(A/G) = \frac{p(A \cap G)}{p(G)} = \frac{1}{3}$

Exercice 3 Partie A

1. (a) Δ est tangente à Γ au point d'abscisse 0.



2. (a) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(t) = e^t - t - 1$.

$\varphi'(t) = e^t - 1 > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$ d'où le tableau :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	$+$
$\varphi(t)$		\searrow	0
			\nearrow

On en déduit $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \geq 0$ soit : $e^t \geq t + 1$

Γ est toujours au dessus de Δ

(b) De (a) on déduit : $\forall t \in \mathbb{R} : e^{-t} \geq -t + 1$ d'où, en ajoutant $t + 1$ aux deux membres :

$\forall t \in \mathbb{R} : e^{-t} + t + 1 \geq 2$

Pour tout x strictement positif, on peut poser $t = \ln x$. On obtient alors :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : e^{-\ln x} + \ln x + 1 \geq 2$ d'où le résultat.

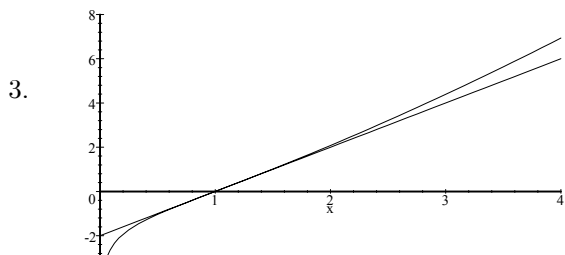
Partie B

1. (a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \ln x + (x + 1) \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \ln x + 1$

D'après (a) $g' > 0$ sur \mathbb{R}_+^* donc g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

$$(b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

2. (a) D a pour équation : $y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2(x - 1)$
 (b) h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : h'(x) = g'(x) - 2 = \frac{1}{x} + \ln x + 1 - 2$
 D'après A2b on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : h'(x) \geq 0$ et donc h croissante sur \mathbb{R}_+^* .
 Comme $h(1) = 0$ on en déduit $h \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ et $h \leq 0$ sur $]0; 1]$.
 (c) De (b) on déduit C au dessus de D sur $[1; +\infty[$ et en dessous sur $]0; 1]$.



4. (a) $g \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ donc $g \geq 0$ sur $[n; n+1]$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Donc U_n représente l'aire, en unités d'aire de la surface délimitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.
 (b) g croissante sur \mathbb{R}_+^* donc sur $[n; n+1]$.
 Donc $\forall x \in [n; n+1] : g(n) \leq g(x) \leq g(n+1)$
 d'où $\int_n^{n+1} g(n) dx \leq \int_n^{n+1} g(x) dx \leq \int_n^{n+1} g(n+1) dx$
 donc $g(n) \leq U_n \leq g(n+1)$
 (c) De (b) on déduit $g(n+1) \leq U_{n+1} \leq g(n+2)$ et donc $U_n \leq U_{n+1}$
 La suite (U_n) est donc croissante.
 (d) La suite (U_n) n'est pas convergente car $g(n) \leq U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Partie C

1. Si $x \leq 1$ $g \leq 0$ sur $[x; 1]$ donc $\int_x^1 g(t) dt \leq 0$ et donc $\int_1^x g(t) dt \geq 0$

Si $x \geq 1$, $g \geq 0$ sur $[1; x]$ donc $\int_1^x g(t) dt \geq 0$

Dans tous les cas : $\int_1^x g(t) dt \geq 0$.

Autre méthode: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : G'(x) = g(x) \Rightarrow$

x		0	1	$+\infty$
$G'(x)$			-	+
$G(x)$			\searrow	0
			\nearrow	

2. $G(x) = \int_1^x g(x) dx = \int_1^x (1+t) \ln t dt$

En posant $u = \ln t$ et $v' = 1+t$, on obtient par exemple : $u' = \frac{1}{t}$ et $v = t + \frac{t^2}{2}$. D'où

$$\left[\left(t + \frac{t^2}{2} \right) \ln t \right]_1^x - \int_1^x \left(1 + \frac{t}{2} \right) dt = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \left[t + \frac{t^2}{4} \right]_1^x = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}$$

3. D'après le rappel de l'énoncé, on déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \frac{5}{4}$

$$G(x) = x^2 \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^2} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$