

Eléments de solution

Solution 1

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ en posant $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
 f étant dérivable sur \mathbb{R} (de dérivée $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$) est dérivable en 1 et donc
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \frac{\sin x}{x}} = 1$ car
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^2} \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = +\infty$ car au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1 + \sqrt{1+x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 - (1+x^2)}{x+1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1 - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$ car au voisinage de $-\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$

Solution 2

1. Deux méthodes : la division de polynômes ou la méthode des coefficients indéterminés exposée ci-après car souvent mal rédigée.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel : } ax+b + \frac{cx+d}{1+3x^2} = \frac{(ax+b)(1+3x^2) + cx+d}{1+3x^2} = \frac{3ax^3 + 3bx^2 + (a+c)x + b+d}{1+3x^2}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax+b + \frac{cx+d}{1+3x^2} \Leftrightarrow 3ax^3 + 3bx^2 + (a+c)x + b+d = 3(x-1)^3 = 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3$$

Deux polynômes sont égaux lorsqu'ils ont même degré et mêmes coefficients. D'où :

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b = -9 \\ a+c = 9 \\ b+d = -3 \end{cases} \text{ système ayant pour solution } a = 1 ; b = -3 ; c = 8 \text{ et } d = 0.$$

$$\text{On a donc } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x - 3 + \frac{8x}{1+3x^2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
3. f fonction rationnelle **définie sur** \mathbb{R} (le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}) est donc dérivable sur \mathbb{R} . Le calcul de $f'(x)$ ne devrait pas poser de problème par contre pour les variations ...

$f'(x)$ ne comporte que des carrés et chacun sait que le carré d'un réel est toujours positif ou nul !!!

Donc, sur \mathbb{R} , $f'(x) > 0$ sauf en -1 et 1 valeurs qui annulent $f'(x)$.

Or si une fonction dérivable sur un intervalle I vérifie $f' > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points, alors f est **strictement** croissante sur I .

4.	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
	$f'(x)$		0	0				
	$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-6	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{1 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{3x} = 0$

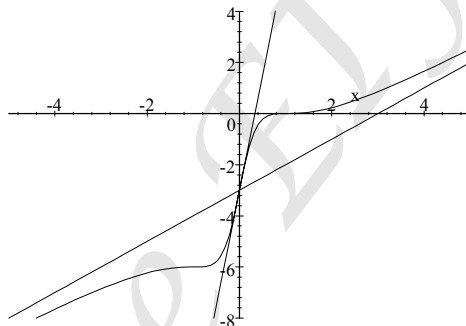
Donc la droite Δ est asymptote à \mathcal{C} vers $+\infty$. Résultat analogue vers $-\infty$.

La position de \mathcal{C} par rapport à Δ est déterminée par le signe de $f(x) - (x - 3) = \frac{8x}{1 + 3x^2}$

$x > 0 \Rightarrow f(x) - (x - 3) > 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ au dessus de Δ

$x < 0 \Rightarrow f(x) - (x - 3) < 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ en dessous de Δ

6. \mathcal{T} a pour équation $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ce qui donne $y = 9x - 3$. Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



7. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ \mathcal{C} a pour équation $y = f(x)$.

Plaçons nous dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ où J a pour coordonnées $(0, -3)$.

Les formules de changement de repère par translation sont : $\begin{cases} x = X + 0 \\ y = Y - 3 \end{cases}$ où (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) les coordonnées du même point dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

L'équation de \mathcal{C} dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ est $Y - 3 = f(X)$ soit $Y = 3 + f(X) = \frac{3X(X^2 + 3)}{1 + 3X^2} = F(X)$

F définie sur $D_F = \mathbb{R}$ vérifie : $\forall X \in D_F, -X \in D_F$ et $F(-X) = \frac{3(-X)((-X)^2 + 3)}{1 + 3(-X)^2} = -F(X)$

La fonction F est donc impaire.

On en déduit que l'origine du repère (qui est le point I) est centre de symétrie de \mathcal{C} .

Solution 3

1. Le développement de $(2z - 1)(z + 1)(4z^2 + 2z + 1)$ conduit au résultat sans problème.

2. D'après 1. il faut résoudre $(2z - 1)(z + 1)(4z^2 + 2z + 1) = 0$.

Deux solutions "évidentes" : $z_0 = -1$ et $z_1 = \frac{1}{2}$. Résolution de $4z^2 + 2z + 1 = 0$.

$\Delta = -12 < 0$. Donc il y a deux racines complexes conjuguées :

$$z_2 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{8} = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}; z_3 = \bar{z}_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

3. Rappel : $\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho; \theta] = \rho e^{i\theta}$ et θ défini modulo 2π .

$$(a) \quad z_2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{i\pi} \overline{e^{i\pi/3}} = \frac{1}{2} e^{i\pi - i\pi/3} = \frac{1}{2} e^{i2\pi/3}$$

$$z_3 = \bar{z}_2 = \frac{1}{2} e^{-i2\pi/3}$$

$$\overrightarrow{A_0 A_2} \text{ a pour affixe } z_{\overrightarrow{A_0 A_2}} = z_2 - z_0 = \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ et } \overrightarrow{A_3 A_1} \text{ pour affixe } z_1 - z_3 = \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Donc $\overrightarrow{A_0 A_2} = \overrightarrow{A_3 A_1}$ d'où $A_0 A_2 A_1 A_3$ parallélogramme.

De plus A_0 et A_1 sont sur l'axe des réels alors que A_2 et A_3 sont sur une droite parallèle à l'axe des imaginaires car leurs affixes sont conjuguées (et des complexes conjugués ont des images symétriques par rapport à l'axe des abscisses). Les diagonales de $A_0 A_2 A_1 A_3$ sont donc perpendiculaires.

Remarque : On pouvait montrer par exemple $A_0 A_2 = A_1 A_3$ en utilisant $AB = |z_B - z_A|$

$$(b) \quad \left| \frac{z_2}{z_3} \right| = \frac{|z_2|}{|z_3|} = \frac{|z_2|}{|\bar{z}_2|} = 1 \text{ (deux complexes conjugués ont même module !!!).}$$

$$\arg \left(\frac{z_2}{z_3} \right) = \arg(z_2) - \arg(z_3) = 4 \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

On a donc $\frac{z_2}{z_3} = e^{i4\pi/3}$ et donc $z_2 = e^{i4\pi/3} z_3$ ce qui traduit $A_2 = r(A_3)$ r étant la rotation de centre O d'angle $4 \frac{\pi}{3}$ (ou $-2 \frac{\pi}{3}$).

(c) L'écriture complexe de la rotation r de centre O d'angle $-2 \frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{-i2\pi/3} z$

$$r(A_1) \text{ a pour affixe } e^{-i2\pi/3} z_1 = \frac{1}{2} e^{-i2\pi/3} = z_3. \text{ Donc } r(A_1) = A_3.$$

$$r(A_2) \text{ a pour affixe } e^{-i2\pi/3} z_2 = e^{-i2\pi/3} \left(\frac{1}{2} e^{i2\pi/3} \right) = \frac{1}{2} = z_1. \text{ Donc } r(A_2) = A_1.$$

Les formules $r(A_1) = A_3$; $r(A_3) = A_2$ et $r(A_2) = A_1$ caractérisent un polygone régulier de centre O .

$A_1 A_2 A_3$ est donc un triangle équilatéral de centre O .

Autre méthode : un rotation étant une isométrie :

$$A_1 A_2 = r(A_2) r(A_3) = A_2 A_3 \text{ et } A_2 A_3 = r(A_3) r(A_1) = A_3 A_1$$

Solution 4

1. $132 = bq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$.

2. D'après 1. : $bq = 132 - r$ et $0 \leq r < 11$.

$$-11 < -r \Rightarrow 121 < 132 - r \text{ soit } 121 < bq.$$

$$b \leq 11 \Rightarrow bq \leq 11q. \text{ On a donc } 121 < bq \leq 11q. \text{ D'où } 11q > 121 \text{ soit } q > 11.$$

Comme $b \leq 11$ on en déduit $b < q$.

3. $132 = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ donc d'après 2. : $0 \leq r < q$ ce qui caractérise la division euclidienne de 132 par q .

4. Si $b = 15$, la division euclidienne de 132 par 15 s'écrit $132 = 15 \times 8 + 12$ avec $0 \leq 12 < 15$.

Ces données ne caractérisent pas la division euclidienne de 132 par 8 car on n'a pas $0 \leq 12 < 8$.

Le résultat de la question précédente n'est donc pas vérifié si on abandonne l'hypothèse $b \leq 11$.