Eléments de solution

Solution 1 Partie A

La division euclidienne de ab par 11 et de reste 1 s'écrit $ab = 11q + 1$
$q = 0 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$ est à exclure car on doit avoir $a \neq b$. Donc $q > 0$ et $ab > 11$.
De plus, a et b étant éléments de E et distincts : $ab \leq 9 \times 10 = 90$.
Les différents produits ab supérieurs à 12 et inférieurs ou égaux à 90 s'écrivant $11q + 1$ sont :
$12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89$.
D'où les solutions : $\{2; 6\}; \{3; 4\}; \{5; 9\}; \{7; 8\}$.
Partie B

1. *Rappel : Si* $a \mid b$ *et* $b \mid c$, *alors :* $a \mid c$.
   (a) $n \geq 3 \Rightarrow (n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)$ est multiple de 2. Donc $(n-1)! + 1$ est impair.
   (b) Si $2p \mid (n-1)! + 1$ on aura, (puisque $2 \mid 2p$) : $2 \mid (n-1)! + 1$. Faux d'après **1.**
   Donc $(n-1)! + 1$ n'est pas divisible par un entier pair.
2. *Rappel :* si $a \mid b$ *et* $a \mid c$ *alors* $a \mid b - c$ *et plus généralement ...*)
   $15 \mid (15-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 14$.
   Si $15 \mid (15-1)! + 1$ alors $15 \mid 1$
   Donc 15 ne divise pas $(15-1)! + 1$
3. $(11-1)! + 1 = 10! + 1 = 3628801$ est divisible par 11 car $1 + 8 + 2 + 3 = 0 + 8 + 6$ (la somme des chiffres de rang pair est égale à la somme des chiffres de rang impair).

Partie C

1. p n'étant pas premier, il admet un diviseur strict, c'est à dire qu'il existe q tel que $1 < q < p$ et $q \mid p$.
   Donc $q \leq p - 1$. Or $(p-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$. Donc q est l'un des facteurs composant $(p-1)!$
2. Si $q \mid (p-1)! + 1$ alors, puisque $q \mid (p-1)!$ on en déduit : $q \mid 1$ ce qui est faux.
   Donc q ne divise pas $(p-1)! + 1$.
3. Si $p \mid (p-1)! + 1$ alors il existe un entier k tel que $(p-1)! + 1 = kp$
   Soit q tel que $q \mid (p-1)!$ (q existe d'après **1.**). On a $q \mid kp$ car $q \mid p$.
   Comme $kp = (p-1)! + 1$ on en déduit $q \mid (p-1)! + 1$. Faux d'après **2.**
   Donc p ne divise pas $(p-1)! + 1$.

Solution 2

1. $AM = |z - z_A| = |z - 1| = \left|e^{i2\theta}\right| = 1$. Donc pour tout $\theta \in]0; \pi[$: $M \in \mathcal{C}$.
2. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \arg \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A} = \arg \dfrac{e^{i2\theta}}{2 - 1} = \arg e^{i2\theta} = 2\theta$
   $\theta \in]0; \pi[\Rightarrow 2\theta \in]0; 2\pi[$. Donc l'ensemble des points M quand $\theta \in]0; \pi[$ est le cercle de centre A et de rayon 1 privé du point B.
3. $z' = e^{-2i\theta} z = e^{-2i\theta}\left(1 + e^{2i\theta}\right) = e^{-2i\theta} + 1 = \overline{e^{2i\theta} + 1} = \bar{z}$.
   De plus : $z_{\overrightarrow{AM'}} = z' - z_A = e^{-2i\theta} \Rightarrow AM' = |z' - z_A| = 1 \Rightarrow M' \in \mathcal{C}$
4. *Rappel :Dans une rotation, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.*

(a) $\mathcal{C}'$ est donc le cercle de centre A' et de rayon 1.
A' a pour affixe $z_{A'} = e^{-2i\pi/3} z_A = e^{-2i\pi/3} = \overline{e^{2i\pi/3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $|z_A| = 1 \Rightarrow OA = 1$
$M \in \mathcal{C} \Rightarrow AM = 1$
$|z| = \left|1 + e^{2i\pi/3}\right| = \left|e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}\right)\right| = \left|e^{i\pi/3}\right| \left|\left(e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}\right)\right| = \left|2\cos\frac{\pi}{3}\right| = 1 \Rightarrow$
$OM = 1$
$OA = AM = OM = 1$ donc le triangle AOM est équilatéral.

(c) $OA' = |z_{A'}| = 1 \Rightarrow O \in \mathcal{C}'$
$z_{M'} = \bar{z}$ et $M \in \mathcal{C}$ donc $M' \in \mathcal{C}$ car $[OB]$ est un diamètre du cercle.
Donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en O et en M'.

(d) M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
A est milieu de $[MP]$. On en déduit que P a pour coordonnées : $\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$A'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc le milieu de $[A'P]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C'est donc le point M' puisque $z' = \bar{z}$

Solution 3

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ il n'y a pas de forme indéterminée ici.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : u(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \dfrac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$
   D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$
3.
   (a) $u(x) + 2x = \sqrt{1+x^2} + x = \dfrac{1}{u(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (u(x) + 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{u(x)} = 0$

   (b) Si $x \geq 0 : u(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} > 0$
   Si $x \leq 0 : u(x) = \sqrt{1+x^2} - x > 0$
   Donc, pour tout x réel :
      i. $u(x) > 0$
      ii. $u(x) + 2x = \dfrac{1}{u(x)} > 0$

   (c) On déduit respectivement de **3a, 3bii, 2 et 3bi** que
      i. la droite Δ d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) vers $-\infty$
      ii. (C) est toujours au dessus de Δ.
      iii. l'axe des abscisses est asymptote à (C) vers $+\infty$
      iv. (C) est toujours au dessus de l'axe des abscisses .